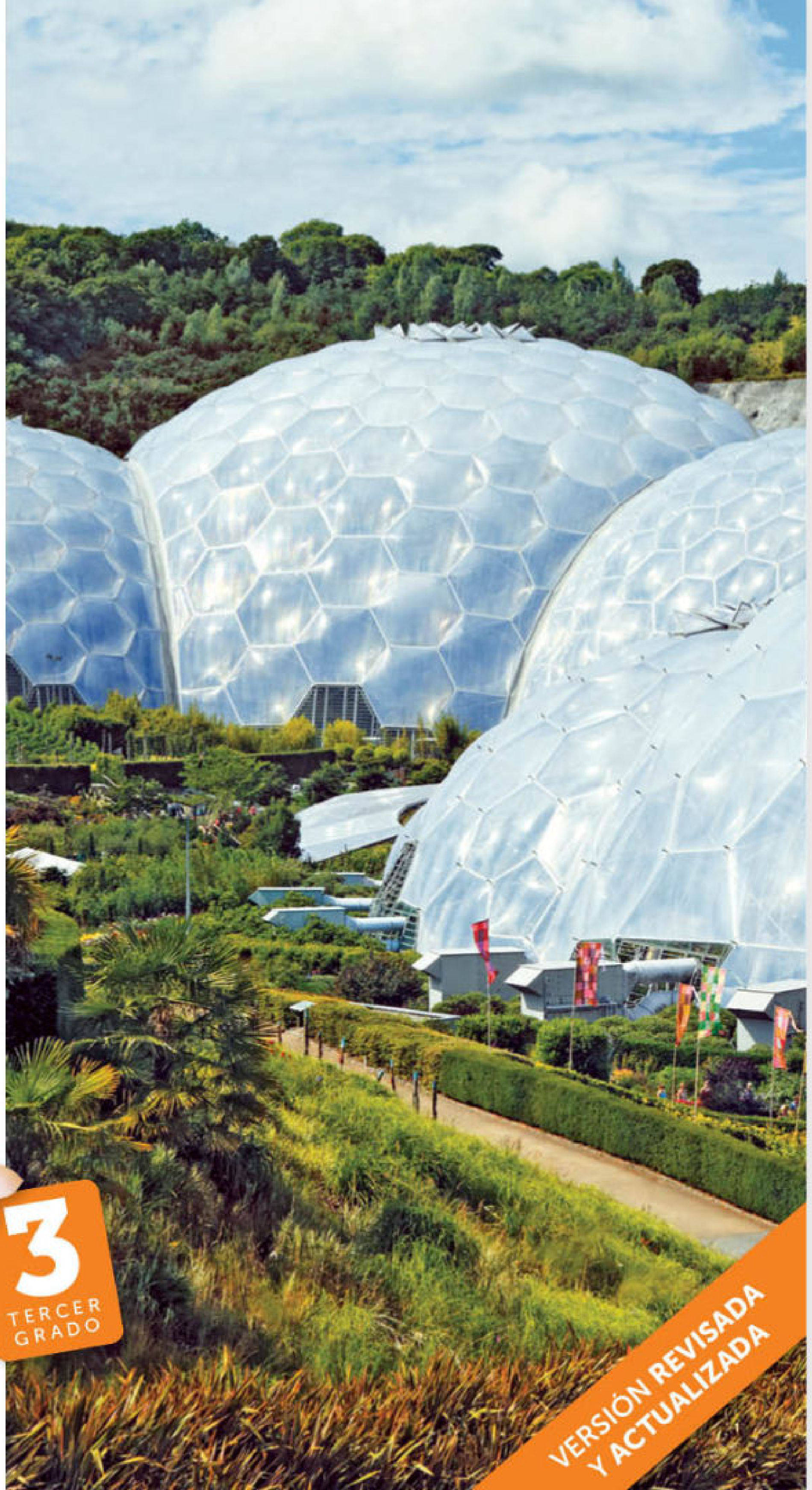
SECUNDARIA
Fundamental PLUS

Matemáticas

Silvia Patricia Romero Hidalgo
Silvia Piña Romero
Sharon Magali Valverde Esparza
María del Pilar Piñones Contreras



3 TERCER GRADO

VERSIÓN REVISADA Y ACTUALIZADA

castillo
A Macmillan Education Company

Dirección editorial: Cristina Arasa ■ Subdirección editorial: Tania Carreño King ■ Subdirección de diseño: Renato Aranda ■ Gerencia de secundaria: Aurora Saavedra Solá ■ Coordinación editorial: Javier Jiménez Alba ■ Edición: Milosh Trnka Rodríguez y Karina Islas Ríos ■ Colaboración: Amira Ochoa, Marlene Escobar, Rocío Serrano Parrales, Miguel Ángel León, Carlos Alberto Martínez Lara y Ma. Teresa Muñoz ■ Revisión técnica: Elvia Perrusquía Máximo ■ Corrección de estilo: María del Carmen Solano del Moral ■ Diseño de la serie: Renato Aranda, Sofía Sauer y Federico Gianni ■ Concepto portada: Germán Montalvo ■ Coordinación de Diseño Editorial: Gustavo Hernández ■ Coordinación de Operaciones: Gabriela Rodríguez Cruz ■ Coordinación de imagen: Ma. Teresa Leyva Nava ■ Supervisión de diseño: Gustavo Hernández ■ Investigación iconográfica: Karla María Estrada Hernández ■ Diagramación: Rocío Álvarez Mince ■ Ilustración: Fernando David Ortiz Prado, Jesús Enrique Gil de María y Campos, Víctor Duarte Alaniz ■ Gráficos: María del Carmen Gutiérrez Cornejo y Rocío Álvarez Mince ■ Fotografía: Gerardo González López y banco de imágenes de Ediciones Castillo ■ Imagen portada: Cornwall, Inglaterra. Fotografía: Franz-Marc Frei/Corbis/Latinstock México. El cubo de agua, Centro Acuático Nacional de Pekín, China. Fotografía: Tim Griffith/Arcaid/© Latinstock México ■ Digitalización y retoque de imágenes: Juan Ortega Corona ■ Gerencia de Producción: Alma Orozco ■ Coordinación de producción: Ulyses Calvillo

Primera edición: marzo de 2014
Cuarta reimpresión: abril de 2018

Matemáticas 3

Insurgentes Sur 1886, Florida,
Álvaro Obregón, C.P. 01030,
Ciudad de México, México.
Tel.: (55) 5128-1350
Fax: (55) 5128-1350 ext. 2899

Ediciones Castillo forma parte de Grupo Macmillan

www.edicionescastillo.com
infocastillo@grupomacmillan.com
Lada sin costo: 01 800 536 1777

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 3304

ISBN de la serie: 978-607-463-567-6
ISBN: 978-607-463-964-3

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Presentación

Matemáticas 3 es parte de la Serie Fundamental, un proyecto que busca ofrecer bases sólidas a los estudiantes de Secundaria para su desempeño escolar, pero sobre todo para la vida. A partir de secuencias didácticas claramente estructuradas, se busca desarrollar las competencias matemáticas para cubrir de la manera más directa posible los aprendizajes esperados, partiendo de algunas de las diversas realidades que viven los estudiantes de este país. Las secuencias de trabajo propuestas buscan que los alumnos recuperen conocimientos y construyan otros nuevos para actuar de forma razonada, reflexiva, autónoma y creativa en situaciones que involucren contextos matemáticos dentro y fuera de la escuela.

Matemáticas 3 también contribuye a la construcción y desarrollo de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que van más allá de la asignatura y que son fundamentales para crear una sociedad solidaria y con visión de futuro. Los cambios socioeconómicos que vive nuestro país, en un mundo cada vez más globalizado e interdependiente, demandan nuevas competencias para el desarrollo democrático de nuestra sociedad. Se trata de formar ciudadanos competentes y competitivos, capaces de aprender a lo largo de su vida, conscientes del compromiso que tienen con su entorno.

Estimada alumna, estimado alumno:

Este libro que tienes en tus manos es producto del esfuerzo de autores, editores, diseñadores e ilustradores que han querido que éste, tu tercer año de secundaria, sea fructífero y que tu experiencia con las matemáticas resulte muy grata e inolvidable. La formación matemática nos permite enfrentar con éxito múltiples problemas de la vida cotidiana; la forma de resolverlos depende de las habilidades y los conocimientos adquiridos en la formación escolar. En este libro enfrentarás distintas situaciones problemáticas, descubrirás que, en la medida en que las entiendas, desarrolles estrategias y aprendas técnicas para resolverlas, podrás trasladar tus habilidades matemáticas a muchas situaciones cotidianas. Encontrarás que entender los problemas matemáticos y la argumentación que apliques para resolverlos y justificarlos; mejorará tu capacidad para resolver y argumentar problemas de otras asignaturas.

En este libro aprenderás a resolver situaciones problemáticas de manera autónoma. Las actividades incluidas en las lecciones representan situaciones que, en un primer momento, te permitirán recurrir a tus conocimientos previos, con los cuales aventurarás posibles soluciones. En la medida en la que adquieras nuevos conocimientos, podrás modificar tus explicaciones iniciales y trasladarlos a nuevas situaciones. El objetivo de este libro es que seas capaz de resolver problemas y elaborar explicaciones en aspectos numéricos y geométricos; utilices diferentes técnicas y recursos para hacer más eficaces tus procesos de resolución, además de desarrollar habilidades para el trabajo autónomo y colaborativo.

También verás que las matemáticas implican leer bien para comprender, además de saber expresarse en lenguaje oral y escrito para comunicar las situaciones matemáticas a las que te enfrentes y sus soluciones. Esto último es muy importante en el trabajo colaborativo, el cual representa una oportunidad para compartir opiniones con los demás y entender sus propuestas.

Las matemáticas no son únicamente números, también es pensamiento claro y lógico; por tanto, aprender matemáticas no es sólo saber hacer cuentas o aplicar operaciones y procedimientos rutinarios para llegar a soluciones que el profesor o el autor de los libros ya conocen, también se trata de cambiar tu forma de ver y relacionarte con tu entorno. Por tanto, que aprendas reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los puedas usar para solucionar problemas, pues aprenderlas no significa memorizarlas, sino entenderlas; lo importante es comprender cómo se formularon y cuál fue la situación problemática que llevó a su planteamiento. De esta manera aprenderás a aplicarlas en distintas situaciones de manera flexible.

Una actitud matemática es una actitud crítica y analítica de la realidad. Al resolver los problemas de este libro, te darás cuenta de que la mayoría de las veces no existe un procedimiento de solución único, pero que todos ellos, si son correctos, llegarán al mismo resultado; de la misma manera, los problemas cotidianos o de otras asignaturas pueden admitir distintas soluciones correctas, las cuales podrás discernir de las no adecuadas gracias al razonamiento lógico.

Al elaborar este libro consideramos que su objetivo va más allá del tratamiento de sus contenidos; pensamos que su finalidad última es que apliques el razonamiento matemático, que desarrolles el hábito del pensamiento racional y utilices los elementos del debate matemático al formular explicaciones o mostrar soluciones. Los aprendizajes esperados en este nivel corresponden a los conocimientos y las habilidades que debes obtener tras estudiar algunos de los contenidos de cada uno de los bloques que constituyen tu libro, junto con otros que le anteceden en bloques o grados anteriores.

Es probable que trabajar de acuerdo con el enfoque de resolución de problemas que propone el libro te genere cierto desconcierto, ya que no es una forma común de abordar los contenidos. Sin embargo, poco a poco te acostumbrarás a buscar de manera autónoma la manera de resolver los problemas que se te plantean, al tiempo que compartes tus ideas con tus compañeros y con tu profesora o profesor, escuchas y respondes sus cuestionamientos, estableces acuerdos y expresas con libertad tus conclusiones y las argumentas.

El trabajo colaborativo con tus compañeros y tu profesor te da la oportunidad de expresar tus ideas y de enriquecerlas con sus opiniones; además propicia el desarrollo de la habilidad para argumentar, discutir, analizar y revisar tus propuestas y las de los demás. En el trabajo colaborativo, todos los integrantes del equipo deben tomar una actitud propositiva y de contribución a la solución de las tareas; no se trata de que unos pocos hagan el trabajo y que el resto sólo observe o realice tareas auxiliares: cada miembro deberá poder explicar el procedimiento propuesto por el equipo para solucionar el problema tratado.

Como podrás darte cuenta, este nuevo curso tiene la finalidad de que desarrolles habilidades, actitudes y valores que te serán útiles en todos los aspectos de tu vida. Estos aprendizajes adicionales no se logran de manera espontánea; para ello es importante que tomes una actitud abierta, responsable y autocrítica, en particular al aceptar las observaciones de tus compañeros y de tu profesor.

Con todo lo anterior se busca el desarrollo de las competencias matemáticas: la capacidad de responder a diferentes situaciones matemáticas a partir de conocimientos (saber), habilidades (saber hacer), y valores y actitudes (valoración de las consecuencias del hacer).

Es muy probable que al terminar este libro tu forma de ver y apreciar las matemáticas sea diferente a la opinión que tenías al iniciar el curso: esperamos despertar en ti el gusto por esta área del conocimiento.

Profesora, profesor:

Muchos niños y jóvenes se plantean por qué estudiar matemáticas, y cuestionan su utilidad argumentando que de adultos se dedicarán a alguna área que, piensan, "poco tiene que ver con ellas". Lo anterior representa una oportunidad y un desafío para los profesores: hacer ver a sus alumnos la relación de esta asignatura con la vida cotidiana, no sólo en lo que respecta a los contenidos matemáticos, sino a las habilidades que éstos desarrollan, como el razonamiento lógico, la solución de problemas, la capacidad de cuestionar y demostrar con argumentos lógicos, así como la de abstracción.

Matemáticas 3, de la serie Fundamental plus de Ediciones Castillo, tiene como objetivo desarrollar las competencias necesarias en ese grado de secundaria, las cuales buscan que el alumno sea capaz de: resolver problemas de manera autónoma; comunicar información matemática; validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente.

El libro se divide en cinco bloques; cada uno se compone de una lección por contenido, la cual se estructura en secuencias didácticas constituidas por problemas, actividades y formalizaciones planeadas para promover la autonomía del alumno y que sea él quien construya su propio conocimiento. Es decir, se considera al alumno como el centro del proceso educativo.

Los *aprendizajes esperados* enunciados al inicio de cada bloque, corresponden a los conocimientos y las habilidades que el alumno debe obtener tras estudiar algunos de los contenidos del bloque, junto con otros que le anteceden en bloques o grados anteriores.

Cada lección comienza con una *Situación inicial*, en la que se plantea un problema o una actividad cercana al alumno, interesante, retadora, para despertar su interés en los contenidos por tratar. El problema estimula el planteamiento de estrategias de solución personales mediante la reflexión y el análisis de los alumnos, la aplicación de sus conocimientos y la formulación de argumentos que justifiquen sus propuestas y que permitan la validación de sus resultados. En esta sección también se incluye un apartado, llamado *Analiza*, que invita a la reflexión sobre la situación inicial.

En *Explora y construye* se tratan con detalle los contenidos, y los alumnos pueden construirlos mediante el uso de las herramientas matemáticas propias de lo abordado; se propicia siempre que enfrenten y superen las dificultades surgidas durante el desarrollo de la lección. El objetivo principal de esta sección es conducir a los alumnos del paso de las ideas previas a los conceptos formales. Cuando es necesario, las actividades se complementan con definiciones y resultados que, por su carácter convencional, no es forzoso que los alumnos conozcan previamente ni que desarrollen por sí mismos.

Las actividades propuestas tienen la finalidad de que los alumnos reestructuren sus conocimientos: los modifiquen, amplíen, rechacen y sean capaces de aplicarlos en nuevas situaciones; aprendan que un mismo problema se puede resolver mediante más de un procedimiento, conjeturen soluciones y validen sus resultados. En su mayor parte, el trabajo es en parejas o equipos, y los contenidos se formalizan en grupo. Con el propósito de reafirmar los conocimientos adquiridos a lo largo de la sección, el apartado *Reflexiona* cierra siempre con un aspecto de mayor grado de dificultad y que hace énfasis en el desarrollo del pensamiento crítico.

Cada lección termina con la sección *Regresa y revisa*, que recapitula la actividad inicial u otra de particular interés en la secuencia, ahora a partir de los conocimientos y habilidades adquiridos. Éste es el momento en el que el alumno compara su solución inicial con una nueva propuesta enriquecida, valora la conveniencia de otras estrategias y la pertinencia de aplicar sus nuevos conocimientos a otros problemas: la intención es que aplique lo aprendido en un contexto diferente. En todos los casos, la sección representa una actividad para valorar el avance del proceso de aprendizaje de los alumnos.

Como complemento, se proponen un par de apartados de aparición ocasional: *Resuelve y practica*, cuya intención es reforzar con actividades adicionales lo visto en la lección, y *Observa y relaciona*, en la que se muestra la relación de los contenidos de algunas lecciones con otras áreas del amplio campo del saber humano.

Al finalizar todas las lecciones de cada bloque se presenta la sección *Aplica las matemáticas*, cuyo objetivo es que los alumnos pongan en práctica, en el marco de una actividad lúdica, los conocimientos y habilidades adquiridos. Después, el apartado *Herramientas* muestra el potencial de la tecnología como apoyo para la aplicación, modelación y aprendizaje de contenidos matemáticos mediante el uso de programas de geometría y la hoja de cálculo, con fines meramente educativos; los proyectos de ambas secciones no son indispensables para completar los propósitos que se buscan alcanzar en el grado y, en determinado momento —sobre todo si no se cuenta con la infraestructura necesaria—, pueden omitirse sin mayores consecuencias.

La evaluación es otro elemento fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que es una oportunidad para que usted valore el desarrollo de las habilidades matemáticas de sus alumnos, lo cual le será útil en el diseño de sus propias estrategias de enseñanza. También son valiosas para los alumnos, ya que les permiten ser reflexivos en cuanto a sus avances. Con este propósito se han incluido tres tipos de evaluaciones al final de cada bloque: *Autoevaluación*, evaluación tipo ENLACE y evaluación tipo PISA.

Este libro busca proporcionarle herramientas para su trabajo docente, pero de ninguna manera se considera que los alumnos puedan alcanzar los propósitos de la asignatura por sí mismos o sólo mediante el libro de texto. El uso que se haga de las actividades depende, por supuesto, de las circunstancias de cada grupo en particular, y para definirlo usted cuenta con los conocimientos y la experiencia que le permitirán tomar las decisiones pertinentes en cada caso. El libro incluye, además, una bibliografía en la que puede encontrar un apoyo extra.

Índice

Bloque 1

Bloque 2

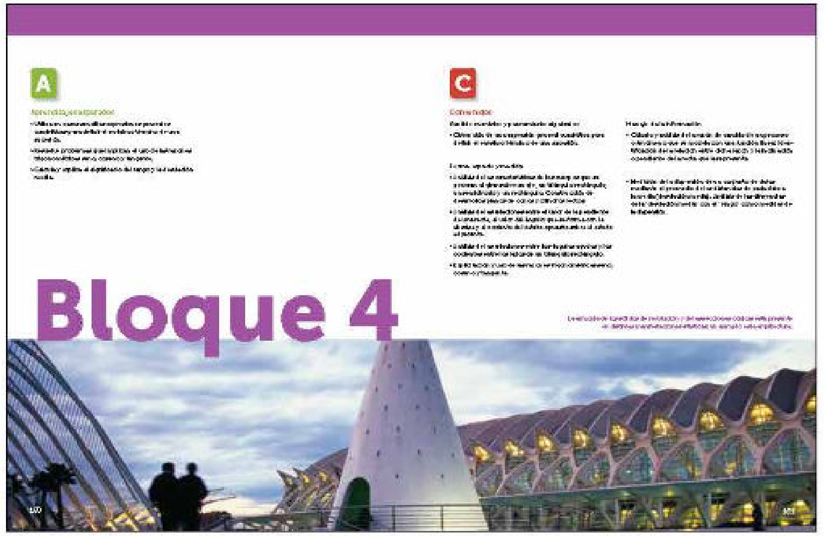
Bloque 3

Índice

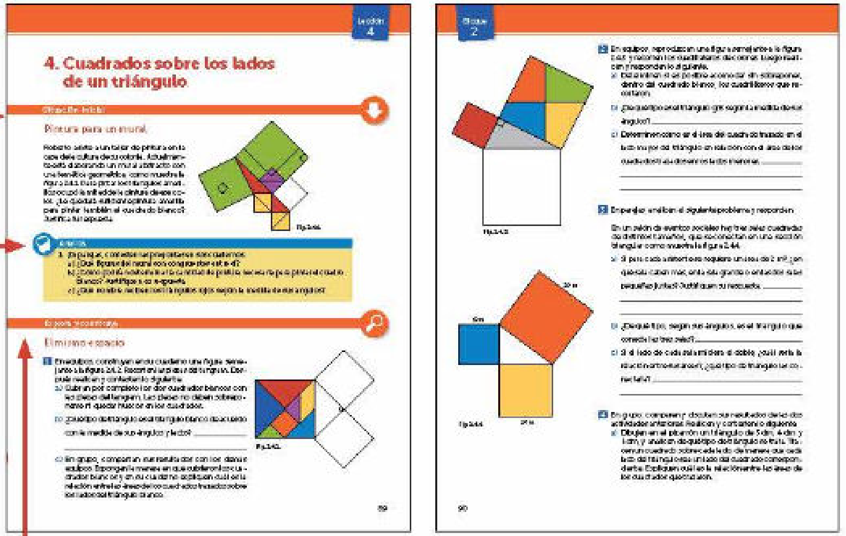
Bloque 4

Bloque 5

Tu libro *Matemáticas 3* está organizado de manera que busca facilitar tu aprendizaje. Conviene que ocupes un momento para conocer algunos de los elementos que forman parte de él, de modo que entiendas su estructura y puedas utilizarlo con mayor provecho.



Este libro se divide en cinco bloques, y cada uno de ellos está formado por varias lecciones. En la **Entrada de bloque** se enuncian los aprendizajes esperados, así como los contenidos que se estudiarán en el bloque.



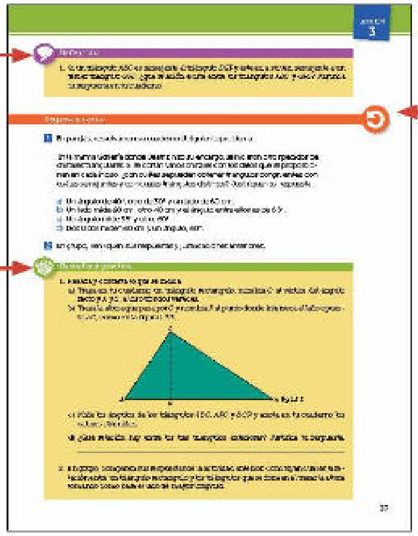
La lección comienza con una **Situación inicial**, cuyo objetivo es que pongas en práctica, de manera creativa, todos tus recursos para comprender un problema o actividad y encuentres estrategias que te permitan llegar a su solución.

En el recuadro llamado **Analiza** hallarás preguntas que buscan propiciar tu reflexión sobre la situación inicial y el trabajo que realizaste en ella.

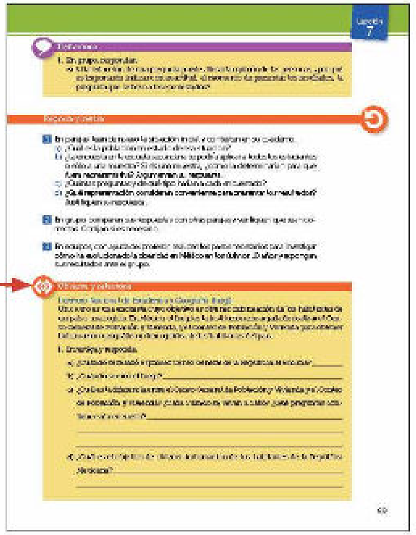
La parte central de cada lección la constituye la sección **Explora y construye**. En ella encontrarás distintas actividades mediante las que, de manera gradual, te familiarizarás con los conceptos y los métodos de las matemáticas vistos en la lección, te harás preguntas y formularás tus propias respuestas. La manera de trabajar lo anterior será, sobre todo, en parejas y equipos, y los resultados se verificarán en grupo.

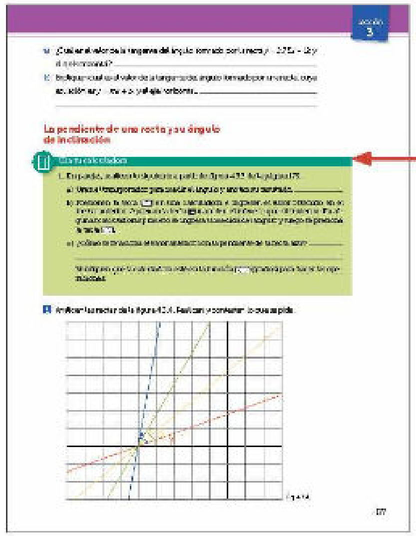
Al final de la sección *Explora y construye* encontrarás el recuadro **Reflexiona**, con actividades y preguntas que buscan fomentar el pensamiento crítico.

Al final de algunas lecciones encontrarás el apartado **Resuelve y practica**, en el que se presenta una serie de ejercicios cuya resolución te permitirá poner en práctica tus conocimientos matemáticos, además de ensayar y perfeccionar tus procedimientos.



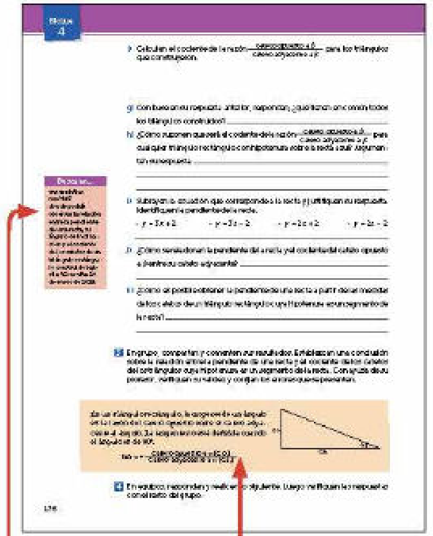
Al final de cada lección, en la sección **Regresa y revisa**, encontrarás una situación en la cual deberás aplicar los conocimientos y habilidades desarrollados. Su objetivo es que te des cuenta tanto de tu progreso personal como de la utilidad de lo aprendido.

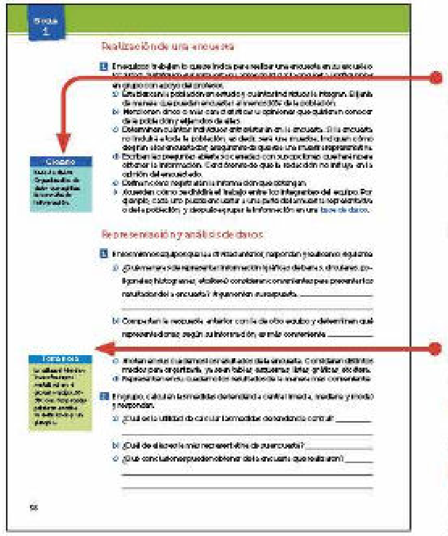




En el apartado **Usa tu calculadora** aprenderás más funciones de esta herramienta.

Algunas lecciones se complementan con un apartado llamado **Observa y relaciona**, en el cual se menciona alguna conexión de los conocimientos que has adquirido con diversos campos del saber, como la Economía, la Historia, la Arquitectura y las ciencias en general.





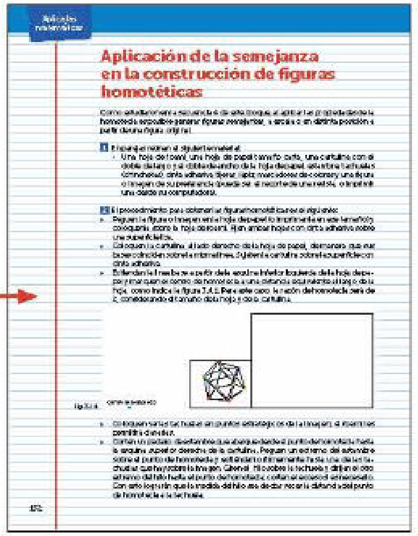
Glosario es una sección flotante en la cual encontrarás la definición de algunos conceptos necesarios para entender los contenidos, aunque no sean parte fundamental de éstos.

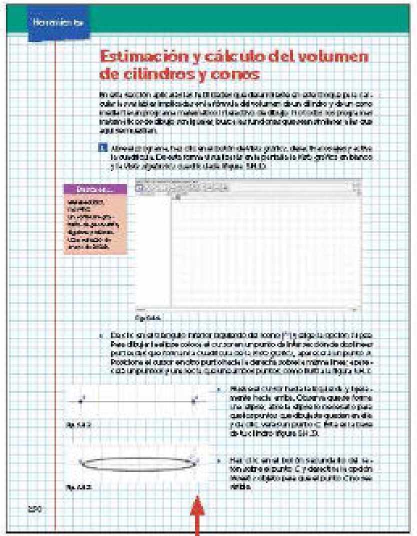
En algunas lecciones aparece la sección flotante **Toma nota**. A partir de ésta completarás la de **Mi glosario matemático** (págs. 256-258), en donde explicarás con tus palabras algunos de los términos matemáticos más importantes del libro, con ejemplos que ayuden a comprenderlos. La definición de algunos de ellos aparece a lo largo de las lecciones, por lo que con esta sección podrás consolidar esos conceptos.

En la mayoría de las lecciones encontrarás la sección flotante **Busca en...**, la cual provee direcciones de páginas de internet en las que podrás practicar los conocimientos vistos en la lección y, en algunas ocasiones, ampliarlos.

Los conceptos importantes del contenido de cada lección se incluyen en recuadros de color salmón.

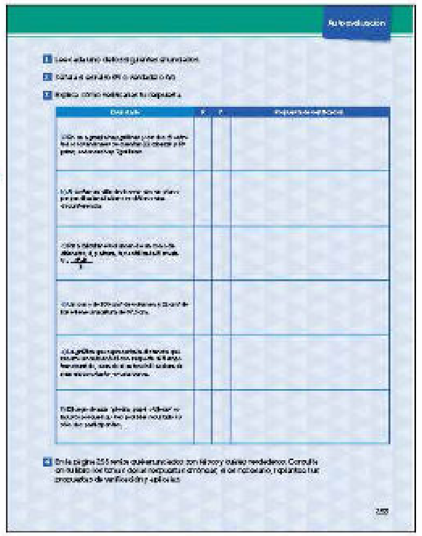
Al final de las lecciones de cada bloque está la sección **Aplica las matemáticas**, en la que practicarás tus conocimientos en juegos y proyectos.





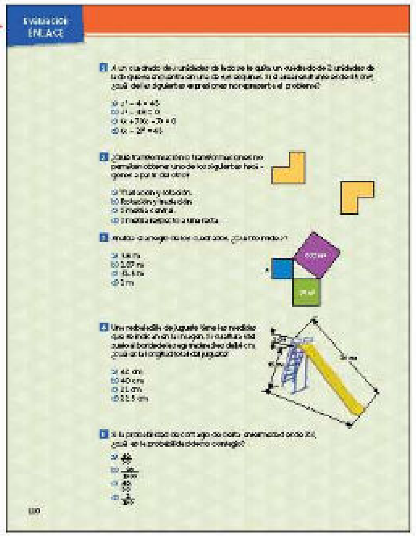
Como conclusión de cada bloque hallarás la sección **Herramientas** en el cual utilizarás la computación para construir polígonos y gráficas, investigar situaciones y resolver distintos tipos de problemas.

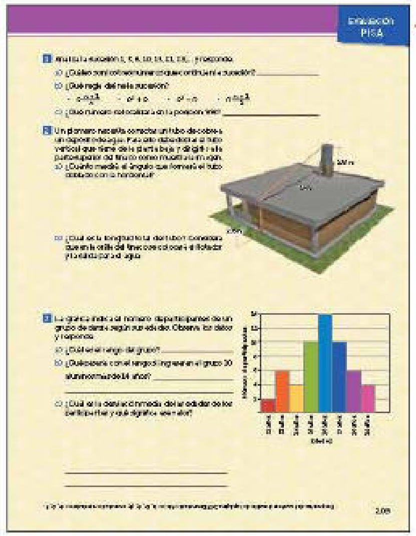
Al final de cada bloque hay tres páginas de evaluaciones. En cada una de ellas utilizarás lo aprendido de un modo distinto.



La **Autoevaluación** contiene una serie de enunciados, uno por cada lección vista en el bloque, que analizarás para responder si son falsos o verdaderos. Después podrás escribir una propuesta de verificación de tu respuesta.

En la prueba tipo **ENLACE** (siglas que corresponden a Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares) encontrarás preguntas, con cuatro respuestas posibles para cada una, en las que pondrás a prueba los aprendizajes de cada bloque.





En la prueba tipo **PISA** (siglas en inglés del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes) hallarás preguntas de análisis de problemas que, además de abarcar contenidos del bloque, implican conocimientos previos.

Competencias que se favorecen:

- ✔ Resolver problemas de manera autónoma
- ✔ Comunicar información matemática
- ✔ Validar procedimientos y resultados
- ✔ Manejar técnicas eficientemente

Bloque 1

Aprendizajes esperados:
- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Semana	Eje	Tema	Lección	Contenido	Páginas
1	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	1. Problemas al cuadrado	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	22 a 26
2	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	2. ¿Iguales o se parecen?	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	27 a 31
3			3. ¿Cómo sabes si son iguales? ¿Cómo sabes si se parecen?	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	32 a 37
4	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	4. Distintas representaciones, una misma situación	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	38 a 42
5			5. Tablas y expresiones algebraicas de relaciones cuadráticas	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	43 a 48
6		Nociones de probabilidad	6. Escala de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	49 a 53
7		Análisis y representación de datos	7. La opinión de los demás	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	54 a 59
8	Aplica las matemáticas, Herramientas, Autoevaluación, Evaluación ENLACE, Evaluación PISA.				60 a 67

Bloque 2

Aprendizajes esperados:
- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Semana	Eje	Tema	Lección	Contenido	Páginas
9	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	1. ¿Cómo resolver ecuaciones cuadráticas?	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	70 a 75
10	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	2. Figuras que giran y cambian de lugar	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	76 a 82
11			3. Diseños con las mismas figuras	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	83 a 88
12		Medida	4. Cuadrados sobre los lados de un triángulo	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	89 a 94
13			5. El teorema de Pitágoras	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	95 a 98
14	Manejo de la información	Nociones de probabilidad	6. Cálculo de la probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	99 a 103
15	Aplica las matemáticas, Herramientas, Autoevaluación, Evaluación ENLACE, Evaluación PISA.				104 a 111

Bloque 3

Aprendizajes esperados:
- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Semana	Eje	Tema	Lección	Contenido	Páginas
16	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	1. Un método para resolver ecuaciones cuadráticas	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	114 a 119
17	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	2. Problemas y triángulos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	120 a 124

18	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	3. El teorema de Tales	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	125 a 130
19			4. Homotecia	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	131 a 136
20	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	5. Otra forma de representar relaciones cuadráticas	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	137 a 141
21			6. Gráficas con secciones rectas y curvas	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	142 a 146
22		Nociones de probabilidad	7. Probabilidad de eventos independientes	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	147 a 151
23	Aplica las matemáticas, Herramientas, Autoevaluación, Evaluación ENLACE, Evaluación PISA.				152 a 159

Bloque 4

Aprendizajes esperados:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Semana	Eje	Tema	Lección	Contenido	Páginas
24	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	1. Sucesiones al cuadrado	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	162 a 167
25	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	2. Conos, cilindros y esferas	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	168 a 173
26		Medida	3. La pendiente y la tangente de una recta	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	174 a 179
27			4. Seno, coseno y tangente	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	180 a 185
28			5. Razones trigonométricas y círculo unitario	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	186 a 191

29	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	6. La razón de cambio	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	192 a 196
30		Análisis y representación de datos	7. Desviación media	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	197 a 201
31	Aplica las matemáticas, Herramientas, Autoevaluación, Evaluación ENLACE, Evaluación PISA.				202 a 209

Bloque 5

Aprendizajes esperados:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Semana	Eje	Tema	Lección	Contenido	Páginas
32	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	1. Ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	212 a 217
33	Forma, espacio y medida	Medida	2. Cortes en cilindros y conos	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	218 a 223
34			3. El espacio que ocupan cilindros y conos	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	224 a 228
35			4. Volumen de cilindros y conos	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	229 a 235
36	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	5. Situaciones de variación lineal y cuadrática	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	236 a 241
37		Nociones de probabilidad	6. Juegos de azar justos e injustos	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	242 a 247
38	Aplica las matemáticas, Herramientas, Autoevaluación, Evaluación ENLACE, Evaluación PISA.				248 a 255

Bloque 1

A

Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

C

Contenidos

Sentido numérico y pensamiento algebraico

- Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

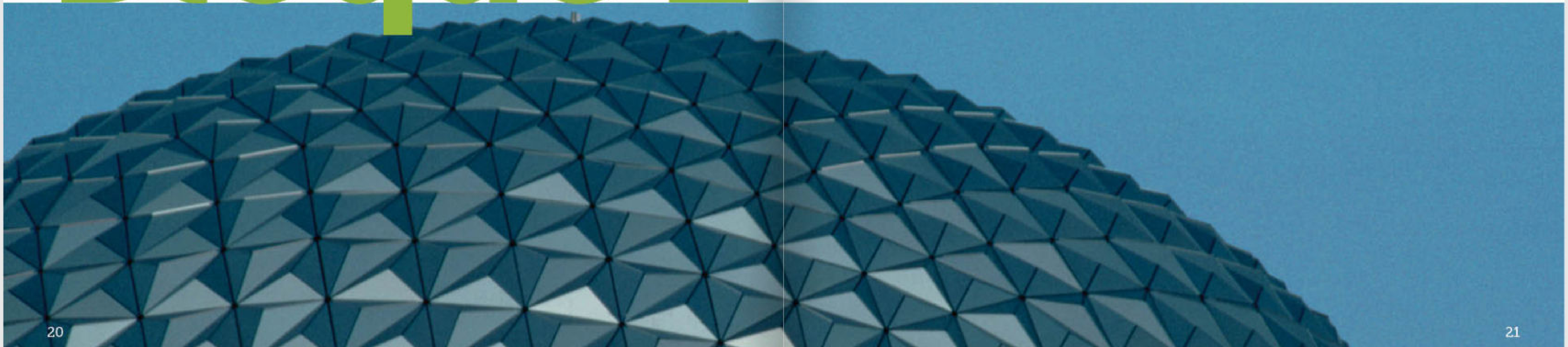
Forma, espacio y medida

- Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.
- Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Manejo de la información

- Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
- Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.
- Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
- Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

El uso de figuras semejantes y congruentes son un importante recurso estructural y artístico aplicado en obras arquitectónicas.



1. Problemas al cuadrado

Situación inicial

El terreno cuadrado

Una casa con jardín ocupa un terreno de forma cuadrada. Si la superficie del jardín es de 25 m² y la casa cubre un área de 200 m², ¿cuánto mide cada lado del terreno?

Analiza

1. En parejas, resuelvan el problema y respondan.
   - **a)** ¿Cuál es el área de todo el terreno? ______
   - **b)** ¿Cuánto mide cada lado del terreno? ______
   - **c)** Expliquen el procedimiento que siguieron para resolver el problema. ¿Qué operaciones realizaron? ¿Por qué? ______
   - **d)** Compartan sus respuestas y procedimientos con otra pareja. ¿Cómo pueden saber si sus respuestas y procedimientos son correctos? ______
   - **e)** Validen sus resultados en grupo con apoyo de su profesor.

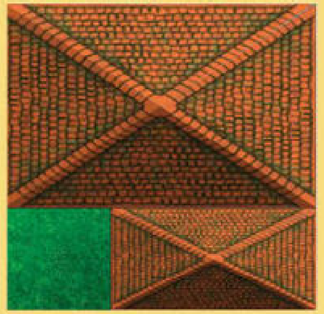


Fig. 1.1.1.

Explora y construye

Fig. 1.1.2.

Un problema y una solución

1 En equipos, resuelvan los siguientes problemas. Analicen cada situación, propongan procedimientos para resolverlos y llévenlo a la práctica; pueden usar calculadora.

a) El yute es una fibra natural muy resistente y biodegradable con la que se elaboran diversos artículos, como alfombras y manteles. Lorena compró en una tienda un juego de portavasos de yute con un área de 64 cm² cada uno. ¿Cuánto mide el lado de cada portavasos?

- Expliquen el procedimiento que siguieron para resolver el problema. ______

b) En la misma tienda, Lorena encontró una alfombra cuadrada cuya área es de 20.25 m² y la quiere colocar en su recámara que mide 4.5 m × 5 m.

- ¿Cuánto mide cada lado de la alfombra?
- ¿La alfombra cabe en el cuarto de Lorena? ______

c) El producto de un número y su consecutivo es 156. ¿De qué números se trata?

- ¿Cuál es el consecutivo de un número natural? ______
- ¿Cómo resolvieron el problema? ¿Cómo podrían comprobar si su solución es correcta? Respondan en su cuaderno.

d) Comparen sus resultados a los problemas anteriores con los de otros equipos.

- ¿Todos llegaron a los mismos resultados? ______
- ¿Los procedimientos fueron iguales o distintos? ______
- ¿Cómo pueden determinar si los resultados y procedimientos que usaron son correctos? Discutan en grupo su respuesta y con ayuda de su profesor lleguen a una conclusión. ______

Una ecuación para cada problema

En cursos anteriores de Matemáticas aprendiste a modelar situaciones problemáticas mediante ecuaciones y expresiones algebraicas, así como a resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones de distintos tipos.

1 En equipos, resuelvan lo siguiente.

a) Para cada uno de los problemas anteriores, planteen una ecuación que modele cada situación.

- Si los portavasos que compró Lorena tienen un área de 64 cm², ¿cuánto mide el lado de cada uno? ______
- Si la alfombra de yute tiene un área de 20.25 m², ¿cuánto mide de lado? ______

- El producto de un número y su consecutivo es 156. ¿De qué números se trata? ______

b) Comparen las ecuaciones que propusieron con las de otros dos equipos. ¿En qué se parecen y en qué son diferentes? Justifiquen su respuesta. ______

- Resuelvan las ecuaciones y describan cómo las resolvieron.
- ¿Cómo pueden comprobar que los resultados que obtuvieron son correctos? ______
- Comparen si sus respuestas a las ecuaciones son iguales o diferentes a las de otros equipos. ______
- Si sus respuestas son distintas, determinen los errores con ayuda de su profesor.
- Si son iguales, comparen sus ecuaciones y comenten, también con ayuda de su profesor, si son correctas, equivalentes o si son las mismas.
- ¿La manera en que resolvieron las ecuaciones es similar o diferente a como antes resolvieron los problemas? Expliquen su respuesta. ______

2 En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

a) El cuadrado de un número, menos 25, es igual a 75. ¿Cuál es ese número?

- Representen el problema mediante una ecuación. ______
- Resuelvan la ecuación y describan su procedimiento.
- Intenten resolver la ecuación con operaciones inversas. Recuerden que la operación inversa de la suma es la resta; la de la multiplicación, la división, y la de la potencia, la raíz. ¿Cómo utilizarían estas operaciones para resolver la ecuación?
- ¿Al utilizar las operaciones inversas obtuvieron el mismo resultado? ______
- ¿Por qué creen que sucede eso? ¿Cuáles son las diferencias y similitudes entre ambos procedimientos? ______

- Comparen su procedimiento con el de otra pareja. ¿Los procedimientos tienen estructuras similares o diferentes? ¿Qué tipo de operaciones involucraron en los procedimientos? ¿Con cuál se requieren menos operaciones? ¿Hay alguno que les resulte más fácil? Expliquen su respuesta.

En grados anteriores aprendiste a resolver problemas modelándolos con ecuaciones de primer grado. Ahora tenemos un tipo distinto de ecuaciones, llamadas *cuadráticas* o de *segundo grado*. Éstas se distinguen de las de primer grado porque el exponente de su incógnita es dos, es decir, tienen una variable cuadrática.

Decimos que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones; por ejemplo, las ecuaciones $2x^2 = 8$ y $x^2 = 4$ son equivalente porque los valores $x = 2$ y $x = -2$ son soluciones de ambas ecuaciones.

Más de una solución

1 En equipos de tres integrantes, resuelvan el siguiente problema.

a) Don Jacinto necesita cubrir el piso del vestíbulo de su casa que tiene forma cuadrada y cuya área es de 2.25 m². Las losetas que utilizará también son cuadradas y tienen 900 cm² de área cada una. ¿Cuántas losetas necesitará?

- Resuelvan el problema planteando inicialmente las ecuaciones necesarias.
- Para determinar la medida de los lados de cada loseta, el equipo de Arely, Karol y Rocío plantearon la siguiente ecuación:

$$a^2 = 900$$

- Su maestro de Matemáticas les comentó que una solución a esa ecuación es −30. ¿Consideran que tiene razón? Comprueben el resultado; pueden usar su calculadora. ______
- ¿$a = -30$ es una solución para $a^2 = 900$? ______
- ¿$a = -30$ cm es una solución para la medida de cada lado de las losetas? Justifiquen sus respuestas. ______

2 En grupo, organizados por su profesor, analicen si la ecuación que plantearon en el problema 2 de la página anterior tiene más de una solución. Si es así, indíquenla y comprueben que sea una solución.

Problemas y ecuaciones

1 En parejas, resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.

a) Un número cuyo cuadrado sumado a 40 es igual a 13 veces el mismo número. ¿De qué número se trata?

- Escriban una ecuación para representar el problema. ¿La ecuación es de primer o de segundo grado? ¿Por qué?
- Resuelvan la ecuación y describan cómo encontraron la solución.
- Encuentren otro número que cumpla con las condiciones del problema.
- Analicen el contexto del problema. ¿Cuántas respuestas válidas tiene este problema? Expliquen su respuesta.

b) Un envase con forma de prisma cuadrangular tiene 10 cm de altura y 3 240 cm³ de volumen. ¿Cuáles son las medidas de la base cuadrada del envase? Planteen una ecuación para resolver el problema.

2 Redacten un problema para cada una de las siguientes ecuaciones.

Ecuación	Problema
$x(3x) = 3$	
$(x + 3)(x) = 70$	
$x^2 - 81 = 0$	

Tabla 1.1.1.

3 Discutan en plenaria la relación que hay entre el grado de una ecuación y el hecho de que pueda tener dos soluciones. Comenten en qué casos una de las dos soluciones no puede ser una respuesta al problema.

Reflexiona

1. Resuelve las ecuaciones $x^2 + 18 = 9$ y $x^2 + 9 = -6x$. ¿Cuántas soluciones tienen? ¿Cómo lo explicas?

Regresa y revisa

1 En un terreno de forma cuadrada, se ubica una casa, un jardín y un pequeño almacén. Si al terreno se le restan los 36 m² del jardín y los 18 m² del almacén, quedan 270 m² de la casa. ¿Cuánto mide cada lado del terreno?

2. ¿Iguales o se parecen?

Situación inicial

Tangram

El tangram es un rompecabezas chino que consta de siete piezas que se obtienen de dividir un cuadrado en cinco triángulos, un cuadrado y un romboide, como se muestra en la figura 1.2.1, y con las cuales se construyen diversas figuras.

1 En parejas, reproduzcan en una hoja de papel, un par de cada una de las piezas de la figura 1.2.1 para formar los polígonos que se indican. Dibújenlos en su cuaderno y anoten sus dimensiones.

- Triángulos con 1, 2, 3, 4 y 5 piezas.
- Cuadrados con 1, 2, 3, 4 y 7 piezas.
- Rectángulos con 2, 3, 4, 5 y 7 piezas.

Fig. 1.2.1.

Analiza

1. Respondan a partir de las figuras que construyeron.

a) ¿Cuántos triángulos son del mismo tamaño? ____________________

b) ¿Qué cuadrados están a escala 1 a 1? ____________________

c) ¿Algún par de rectángulos tienen la misma forma, pero distinto tamaño? __________

d) Comparen sus polígonos con los de otras parejas y respondan nuevamente en su cuaderno las preguntas anteriores.

Explora y construye

2 Comparen su trabajo con el de la otra pareja y respondan.

a) ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo *ABC* que trazaron y del que trazó la otra pareja? ______________________

b) Obtengan las razones entre los lados correspondientes y anótenlas. ¿Qué observan? ______________________

c) ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo *OPQ* de la pareja con quien compararon su trabajo? ______________________

d) ¿En qué coinciden y en qué difieren los triángulos que trazaron y los de la otra pareja? ______________________

____

3 En grupo, analicen los triángulos *ABC* y *OPQ* que construyeron los distintos equipos y en su cuaderno respondan las siguientes preguntas.

a) Obtengan las razones entre los lados correspondientes de los triángulos *ABC* que trazaron las parejas de dos equipos distintos. ¿Qué observan? Anoten sus conclusiones.

b) ¿Qué relación hay entre los ángulos correspondientes de los triángulos *OPQ*?

c) ¿En qué caso los triángulos son idénticos y en cuál hay una proporción entre sus lados?

Busca en...

www.edutics.mx/4u4 podrás analizar las características de dos triángulos semejantes. (Consulta: 20 de enero de 2019).

4 En parejas, tracen en su cuaderno los triángulos que se piden; usen su juego de geometría.

- Un triángulo cuyos tres lados midan 9 cm. Designen los vértices con *D*, *E* y *F*.
- Un triángulo con dos ángulos de 60°. Llamen, respectivamente, *G* y *H* a los vértices de esos ángulos e *I* al tercer vértice.

5 Midan los ángulos y lados de ambos triángulos. Completen las igualdades y respondan en su cuaderno lo que se pide.

- $\overline{DE} = 9$ cm $\measuredangle D =$ ______ $\overline{GH} =$ ______ $\measuredangle G = 60°$
- $\overline{EF} = 9$ cm $\measuredangle E =$ ______ $\overline{HI} =$ ______ $\measuredangle H = 60°$
- $\overline{FD} = 9$ cm $\measuredangle F =$ ______ $\overline{IG} =$ ______ $\measuredangle I =$ ______

a) ¿Qué datos necesitan para afirmar o refutar si los triángulos *DEF* y *GHI* son idénticos?

b) Sustituyan en las siguientes razones los valores que anotaron y determinen con calculadora los cocientes que se obtienen.

- $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{GH}} = \text{\_\_\_\_} =$
- $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{HI}} = \text{\_\_\_\_} =$
- $\dfrac{\overline{FD}}{\overline{IG}} = \text{\_\_\_\_} =$

c) ¿Qué representan las razones anteriores? ¿Qué observan respecto a los cocientes que se obtienen? Expliquen qué significa ese resultado.

6 En grupo, comparen sus resultados con los de otras parejas. ¿Qué pueden concluir si comparan los cocientes de los triángulos que trazaron? ¿Qué significa ese resultado?

Cuando dos triángulos tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño, se dice que son *semejantes* y se denota por el símbolo ≈. Por ejemplo, los triángulos cuyos vértices son *A*, *B*, *C* y *M*, *N*, *O* son semejantes, lo que se expresa de la siguiente manera:

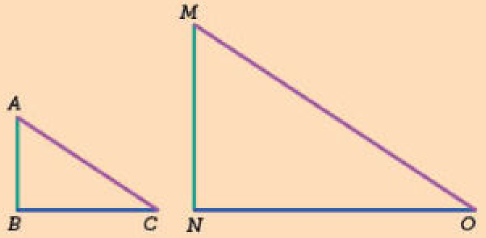


Fig. 1.2.2.

$$\Delta ABC \approx \Delta MNO$$

Dos triángulos semejantes tienen sus ángulos iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. Al cociente de la razón entre la medida de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes se le llama *razón de semejanza*.

En la figura 1.2.2 los lados correspondientes están marcados del mismo color.

7 Determina la razón de semejanza de los triángulos de la figura 1.2.2. ______________________

8 En parejas, realicen y respondan, en su cuaderno, lo siguiente.

a) Determinen si los triángulos *RST* y *UVW* de la figura 1.2.3 son semejantes. Justifiquen su respuesta.

b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los dos triángulos?

c) Determinen si el triángulo *OPQ* de la actividad 1 de la página 27 y el triángulo *RST* son semejantes. Expliquen el procedimiento que siguieron para encontrar la respuesta.

d) Si su respuesta es afirmativa, señalen la razón de semejanza entre ellos.

9 En grupo, expliquen cuál es la relación entre los triángulos semejantes cuya razón de semejanza es 1.

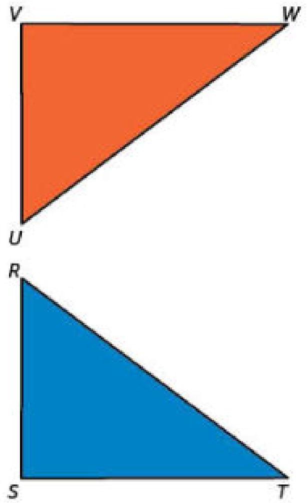


Fig. 1.2.3.

Si los lados y ángulos correspondientes de dos triángulos son respectivamente iguales, entonces dichos triángulos son *congruentes*. Para indicarlo se utiliza el símbolo ≅.

Por ejemplo, los triángulos *IJK* y *XYZ* son congruentes. Por tanto:

$$\Delta IJK \cong \Delta XYZ$$

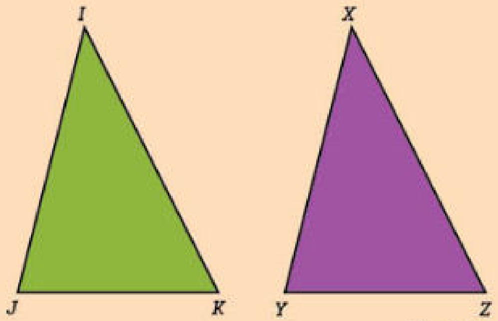


Fig. 1.2.4.

Semejanza y congruencia de cuadrados y rectángulos

1 Construye en tu cuaderno los siguientes cuadrados.

- Un cuadrado cualquiera.
- Un cuadrado de 3 cm por lado.
- Un cuadrado de 24 cm de perímetro.
- Un cuadrado cuya área sea 36 cm^2.

2 En equipos de cuatro integrantes, comparen sus cuadrados y respondan.

a) ¿Qué similitudes y diferencias identifican entre los cuadrados que trazaron?

____

b) Determinen qué cuadrados son semejantes y cuáles son congruentes. Justifiquen su respuesta. ______________________________

c) Escriban una definición de cuadrados congruentes. ______________________________

____

d) Escriban una definición de cuadrados semejantes. ______________________________

____

3 En grupo, expongan sus definiciones anteriores y, con apoyo de su maestro, corríjanlas si es necesario.

4 En grupo, respondan lo siguiente.

a) ¿Cualquier otro cuadrado que tracen es semejante, congruente o totalmente distinto a los que trazaron en la primera actividad? ______________________________

5 En parejas, lean y respondan lo siguiente.

Juan dice que los rectángulos *ABCD* y *EFGH* de la figura 1.2.5 son semejantes porque sus ángulos son iguales y su tamaño es distinto.

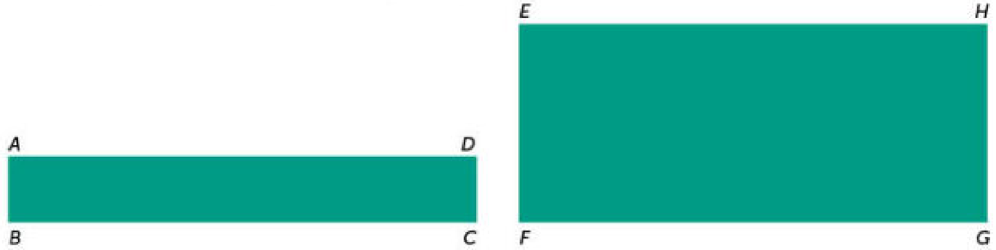


Fig. 1.2.5.

a) ¿Consideran que tiene razón? Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

____

b) ¿Cuáles propiedades se deben verificar en dos figuras para considerarlas semejantes? ______________________________

Rectángulos en el plano cartesiano

1 En parejas, realicen lo siguiente y respondan en su cuaderno.

▶ Tracen en el plano de la figura 1.2.6 los rectángulos con las dimensiones que se indican, de modo que cada vértice inferior izquierdo coincida con el origen y su largo se localice sobre el eje horizontal.

- 2 unidades de largo y 1 de ancho.
- 5 unidades de largo y 2 de ancho.
- 7.5 unidades de largo y 3 de ancho.
- 3 unidades de largo y 1.5 de ancho.

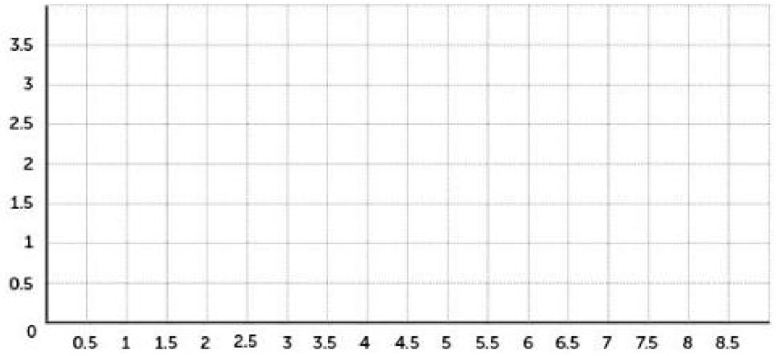


Fig. 1.2.6.

a) ¿Cuáles de los rectángulos que trazaron son semejantes? Expliquen su respuesta.

▶ Tracen desde el vértice compartido una diagonal de cada rectángulo.

b) ¿Cuál es la relación entre las diagonales de los rectángulos semejantes?

2 En grupo, comparen sus resultados anteriores y debatan lo siguiente.

- Si en un plano cartesiano se representan mediante pares ordenados las medidas de largo y ancho de rectángulos semejantes, ¿cómo interpretarían la gráfica que une todos esos puntos con el origen?

Reflexiona

1. En parejas, determinen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen sus respuestas en su cuaderno y verifíquenlas con su profesor.
   - **a)** Todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí.
   - **b)** Algunos cuadrados no son semejantes.
   - **c)** Dos rectángulos siempre son semejantes.
   - **d)** Si dos rectángulos son congruentes, entonces también son semejantes.
   - **e)** Si dos rectángulos son semejantes, entonces también son congruentes.
   - **f)** La razón de semejanza de dos cuadrados es igual al cociente de sus perímetros.

Regresa y revisa

1 En equipos de tres integrantes, determinen cuáles de los polígonos que construyeron en la situación inicial son semejantes y cuáles son congruentes.

2 En grupo, comparen y discutan sus respuestas anteriores y calculen la razón de semejanza de las figuras semejantes.

3. ¿Cómo sabes si son iguales? ¿Cómo sabes si se parecen?

Situación inicial

Una ventana errónea

Beatriz encargó en una vidriería un cristal triangular con una base de 80 cm y un lado de 60 cm. Cuando Beatriz fue a recogerlo le entregaron un cristal distinto del que ella esperaba. ¿Al menos qué otra información debió proporcionar para que le dieran el vidrio que requería?

Analiza

1. En parejas, realicen y respondan lo siguiente.
   a) Escriban a continuación su procedimiento para encontrar la respuesta. ______
   b) ¿Con las medidas que proporcionó Beatriz se podría construir sólo uno o más triángulos distintos? ¿Por qué? ______
   c) Indiquen con qué datos extra el vidriero podría cortar el cristal que ella necesitaba. ______
2. En grupo, comparen sus respuestas y determinen cuántos triángulos distintos se pueden trazar con las indicaciones de Beatriz.

Explora y construye

Lo mínimo para ser iguales

1 En parejas, realicen lo siguiente.

a) Escriban una definición de congruencia de triángulos. ______

b) Anoten una definición de semejanza de triángulos. ______

c) Describan la diferencia entre congruencia y semejanza de triángulos. ______

2 Tracen individualmente los siguientes triángulos con su juego de geometría, y en parejas contesten lo que se pide.

a) Un triángulo en el que dos de sus lados midan 3 cm y 6 cm, respectivamente, y el ángulo entre ellos sea de 55°.

- Comparen su triángulo con el de su compañero. ¿Cómo son entre sí? Anoten sus conclusiones. ______
- ¿Por qué piensan que obtuvieron ese resultado? ______

b) Un triángulo con un ángulo de 50°, otro de 60° y el lado entre ellos sea de 4 cm.

- Comparen con otra pareja sus construcciones. ¿Cómo son entre sí los triángulos que trazaron? ______

c) Un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 6 cm, respectivamente.

- Comparen sus triángulos y, después, con los de otra pareja. Escriban cómo son entre sí los triángulos que trazaron. ______

3 Hagan en su cuaderno lo siguiente.
a) Repitan los incisos de la actividad anterior con datos similares a los que se indicaron en cada uno. Por ejemplo, para el inciso a) propongan medidas de dos lados y el ángulo entre ellos para trazar un triángulo; para el inciso b) den la medida fija de un lado y los ángulos adyacentes, y para el inciso c) proporcionen las medidas de 3 lados.
- Comparen los triángulos que trazaron y digan cómo son entre sí.

b) En grupo, comenten las condiciones necesarias para que al trazar dos o más triángulos, éstos sean congruentes.

4 Lean y resuelvan en equipos de tres integrantes las siguientes situaciones.
a) Sandra y Diana trazaron, cada una, un triángulo con un lado de 4 cm, otro lado de 7 cm y un ángulo de 30°, como muestra la figura 1.3.1.

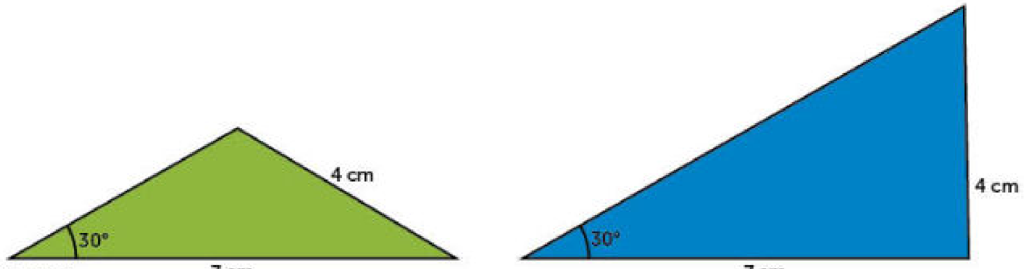


Fig. 1.3.1.

- ¿Estos triángulos son congruentes dado que comparten las medidas de dos de sus lados y un ángulo? ______
- ¿Qué otra condición se deberá añadir a las construcciones de Sandra y Diana para que se obtengan triángulos congruentes? ______

b) Carlos y Antonio también trazaron dos triángulos, uno cada uno, como muestra la figura 1.3.2. En ambos triángulos, dos ángulos miden 40° y un lado es de 6 cm de longitud.

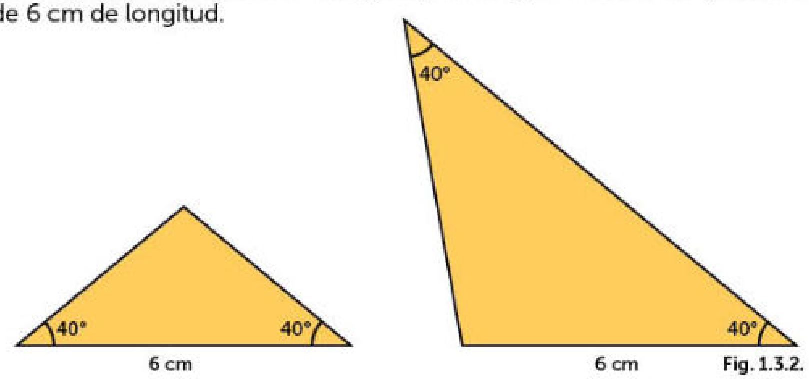


Fig. 1.3.2.

- ¿Qué otra condición se debería agregar para que los triángulos de Carlos y Antonio fueran congruentes? ______

5 En grupo, comenten y discutan sus conclusiones. Analicen con qué condiciones se obtienen triángulos congruentes.

Las condiciones que analizaron permiten verificar si dos triángulos son congruentes sin necesidad de comparar uno a uno sus lados y sus ángulos. Esas condiciones se conocen como *criterios de congruencia de triángulos* y son los siguientes:
- **Lado – Lado – Lado (LLL).** Si los tres lados de un triángulo son iguales, respectivamente, a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son *congruentes*.
- **Lado – Ángulo – Lado (LAL).** Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos coinciden en medida con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son *congruentes*.
- **Ángulo – Lado – Ángulo (ALA).** Si dos ángulos de un triángulo y el lado comprendido entre ellos tienen la misma media que dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son *congruentes*.

Lo mínimo para parecerse

1 Utiliza un juego de geometría para trazar en tu cuaderno los triángulos con las características que se indican en cada inciso. En parejas, contesten las preguntas.
a) Sus ángulos miden 25°, 85° y 70°.
- Comparen el triángulo que trazaron con el de su compañero y analicen cómo se relacionan las longitudes de los lados. ¿Cómo son entre sí los dos triángulos? Escriban sus conclusiones. ______

b) Un ángulo mide 50° y el otro, 60°.

- Comparen sus triángulos entre sí y luego con los triángulos que construyeron en el inciso b) de la página 33. ¿Qué información comparten? ¿Cómo son entre sí esos triángulos? ____________________
- Expliquen por qué se puede afirmar que los triángulos anteriores son semejantes. ____________________

c) Uno de sus lados mide 6 cm, otro 12 cm y el ángulo entre ellos es de 55°.

- Comparen estos triángulos con los que hicieron en el inciso a) de la página 33. ¿Cómo se relacionan los lados y los ángulos de éstos? ____________________
- Justifiquen por qué se puede asegurar que los triángulos son semejantes. ____________________

d) Sus lados miden 6 cm, 10 cm y 12 cm.

- Comparen sus triángulos con los del inciso c) de la página 34. ¿Qué relación hay entre sus lados? ____________________
- Expliquen por qué es posible afirmar que los triángulos son semejantes. ____________________

Busca en...

www.edutics.mx/4uZ donde podrás observar y analizar los criterios de semejanza de triángulos. (Consulta: 20 de enero de 2019).

2 En grupo, comenten y discutan sus conclusiones. Determinen con qué condiciones dos triángulos son semejantes.

Con las condiciones anteriores se puede determinar si dos triángulos son semejantes sin necesidad de comparar todos los ángulos ni revisar que sus lados correspondientes sean proporcionales. Esas condiciones mínimas que garantizan la semejanza de dos triángulos se conocen como *criterios de semejanza de triángulos* y son los siguientes:

- **Ángulo – Ángulo.** Si dos triángulos tienen al menos dos ángulos iguales, entonces ambos triángulos son semejantes.
- **Lado proporcional – Ángulo – Lado proporcional.** Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre ellos es igual, entonces los dos triángulos son semejantes.
- **Lado proporcional – Lado proporcional – Lado proporcional.** Si todos los lados de un triángulo son proporcionales a los lados correspondientes de otro triángulo, entonces ambos triángulos son semejantes.

Reflexiona

1. Si un triángulo ABC es semejante al triángulo DEF y éste es, a su vez, semejante a un tercer triángulo GHI, ¿qué relación existe entre los triángulos ABC y GHI? Justifica tu respuesta en tu cuaderno.

Regresa y revisa

1 En parejas, resuelvan en su cuaderno el siguiente problema.

En la misma vidriería donde Beatriz hizo su encargo, se hicieron otros pedidos de cristales triangulares. Si se cortan varios cristales con los datos que se proporcionan en cada inciso, ¿con cuáles se pueden obtener triángulos congruentes, con cuáles semejantes y con cuáles triángulos distintos? Justifiquen su respuesta.

a) Un ángulo de 40°, otro de 30° y un lado de 60 cm.
b) Un lado mide 80 cm, otro 40 cm y el ángulo entre ellos es de 65°.
c) Un ángulo mide 35° y otro, 60°.
d) Dos lados miden 60 cm y un ángulo, 60°.

2 En grupo, verifiquen sus respuestas y justificaciones anteriores.

Resuelve y practica

1. Realiza y contesta lo que se indica.
   a) Traza en tu cuaderno un triángulo rectángulo, nombra C al vértice del ángulo recto y A y B, a los otros dos vértices.
   b) Traza la altura que pasa por C y nombra P al punto donde interseca al lado opuesto a C, como en la figura 1.3.3.

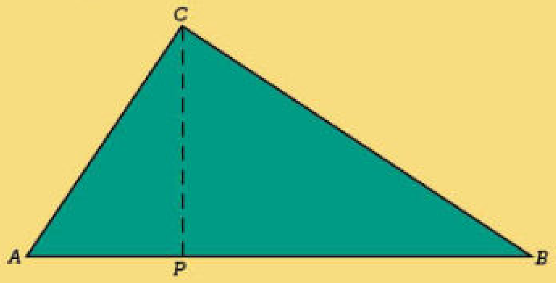


Fig. 1.3.3.

   c) Mide los ángulos de los triángulos ABC, APC y BCP y anota en tu cuaderno los valores obtenidos.
   d) ¿Qué relación hay entre los tres triángulos anteriores? Justifica tu respuesta. ____________________

2. En grupo, comparen sus respuestas de la actividad anterior. Concluyan cuál es la relación entre un triángulo rectángulo y los triángulos que se forman al trazar la altura tomando como base el lado de mayor longitud.

4. Distintas representaciones, una misma situación

Situación inicial

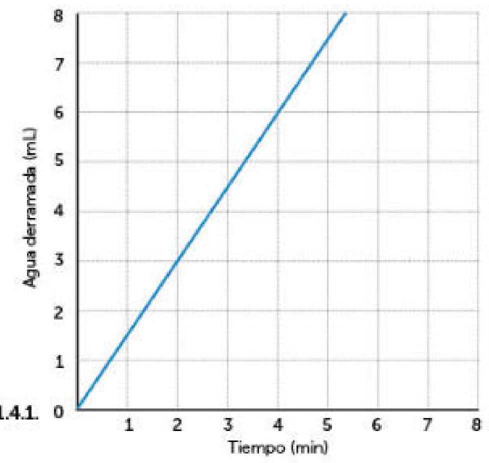


Fig. 1.4.1.

La fuga

Gabriel detectó una gotera en el lavabo de su casa. La gráfica de la figura 1.4.1 muestra la cantidad de agua que se derramaría en cierto tiempo si la gotera no se repara. Si 20 gotas equivalen a 1 mL, ¿en cuánto tiempo, después de que cae una gota, cae la siguiente? Si consideras que el tinaco está lleno y que su capacidad es de 200 L, ¿en cuánto tiempo se vaciaría?

Analiza

1. En parejas, respondan las preguntas.

a) Observa la gráfica; de acuerdo con ella, ¿qué tipo de relación existe entre las variables representadas? Justifiquen su respuesta. ______

______

______

b) ¿Escriban una expresión algebraica que represente la situación?

______

c) Completen la tabla.

Tiempo (min)	Agua derramada (mL)
1	
5	
7	
30	
60	
120	
3 600	

Tabla 1.4.1.

d) Si la gotera no se repara, ¿cuánta agua se derramaría en una semana? ______

Explora y construye

El consumo de gasolina alrededor del mundo

1 En equipos, lean el siguiente texto y realicen las actividades.

La gasolina es uno de los derivados del petróleo más importantes a nivel mundial, ya que la mayoría de los medios de transporte (automóviles, aviones, ferrocarriles, etcétera) la utilizan como combustible. El precio de la gasolina varía de un país a otro. En Chile, por ejemplo, el costo por litro de gasolina entre 2008 y 2012 fue aproximadamente de $17.94 (pesos mexicanos); en Noruega, por la misma cantidad de combustible se pagaban $27.56; en Dinamarca, $26.00, y en Bolivia, $9.10.
Fuente: http://datos.bancomundial.org/indicador/ep.pmp.sgas.cd

Busca en...
www.edutics.mx/4uo donde podrás encontrar varios recursos gráficos y algebraicos para identificar y resolver situaciones que implican una relación de proporcionalidad. (Consulta: 20 de enero de 2019).

a) Expliquen por qué la relación entre la cantidad de gasolina y su precio, en cualquier país, es una relación de proporcionalidad directa. ______

______

b) Herman vive en Alemania y compró 20 L de gasolina para su automóvil. El punto coordenado (20, 494) pertenece a la gráfica que relaciona los litros de gasolina y su costo en pesos mexicanos.

- Tracen en el plano coordenado de la figura 1.4.2 la gráfica que corresponde a esa relación.

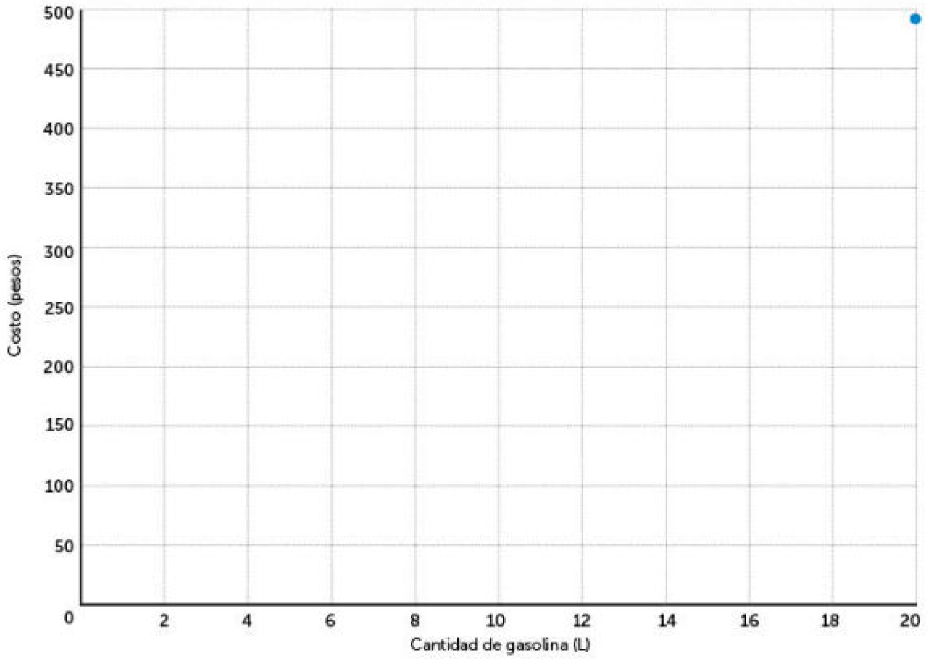


Fig. 1.4.2.

- Obtengan la expresión algebraica que representa la relación entre la cantidad de gasolina que se compra en Alemania y su costo. ______

______

Gasolina comprada en Alemania (L)	Costo (pesos)
	24.70
2	
8	
	247.00
15	
	444.60

Tabla 1.4.2.

Gasolina comprada en Dinamarca (L)	Costo (pesos)
1	
3	
	130.00
	273.00
14	
	494.00

Tabla 1.4.3.

- El tanque de gasolina del automóvil de Herman tiene una capacidad de 50 L. Si el tanque está vacío, ¿cuánto debe pagar para llenarlo? ____________
- Completen la tabla 1.4.2 y sitúen en la gráfica anterior los puntos coordenados que le corresponden.

c) Tracen en el plano cartesiano de la figura 1.4.2 la gráfica representada por la expresión $y = 26x$. ¿Al precio de la gasolina de qué país corresponde? ____________

- Completen la tabla 1.4.3 a partir de la ecuación y señalen en la gráfica que acaban de trazar los puntos coordenados que le corresponden.
- ¿Cuánto costaría llenar el tanque del automóvil de Herman en ese país? ____________

2 La tabla 1.4.4 muestra lo que Julián paga por el consumo de gas en su casa. Analicen la tabla y realicen lo que se pide.

- Completen la tabla.

Cantidad de gas (L)	Costo (pesos)
0	
0.5	2.25
	9.00
3.5	
9.5	
	54.00
15	67.5

Tabla 1.4.4.

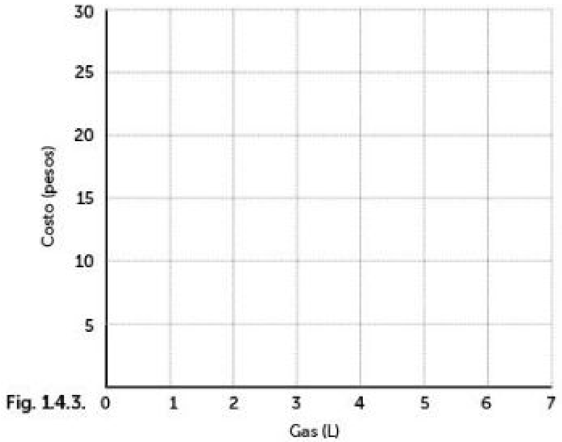


Fig. 1.4.3.

- ¿Qué tipo de relación muestran los valores de esta tabla? Justifiquen su respuesta. ____________
- Tracen en el plano cartesiano de la figura 1.4.3 la gráfica que corresponde a los valores de la tabla.
- Determinen la expresión algebraica que representa el costo de gas por cada litro en la casa de Julián. ____________

- Utilicen la expresión anterior para determinar el costo de 35, 50 y 75 L de gas.

3 En grupo, realicen lo siguiente.

a) Verifiquen que sus respuestas de la actividad anterior sean correctas y corríjanlas si es necesario.
b) Comenten las ventajas de utilizar una representación (tablas, gráficas o expresiones algebraicas) respecto a otra, según los datos que se quieren analizar de una situación dada. Escriban en sus cuadernos las conclusiones.

Distintas situaciones, una misma representación

1 En parejas, analicen la gráfica de la figura 1.4.4. Realicen y respondan lo que se indica.

- Completen la tabla 1.4.5 a partir de la gráfica.

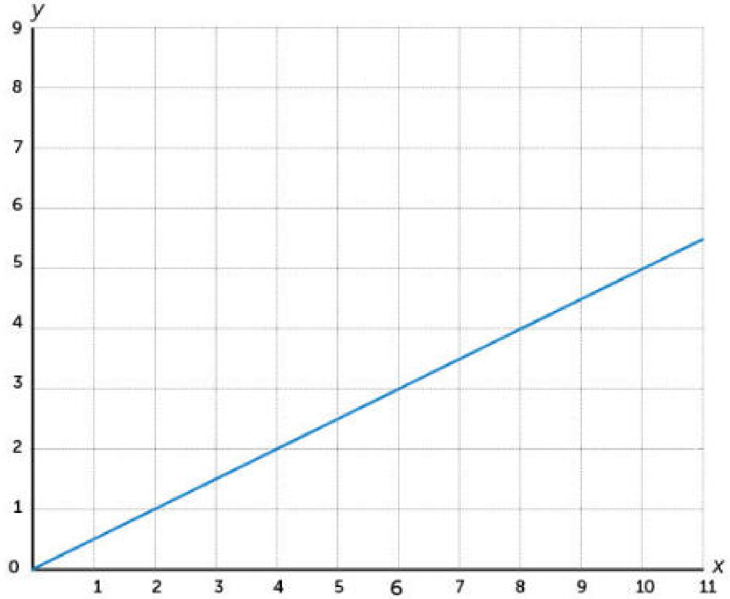


Fig. 1.4.4.

x	y
0	
	0.5
	1
3	
5	
	5

Tabla 1.4.5.

- Obtengan la expresión algebraica que relaciona los valores de la tabla.
- Determinen si la expresión anterior representa las siguientes situaciones. Justifiquen su respuesta en su cuaderno.

I. En una papelería venden hojas de papel milimétrico a 50 centavos cada una.
II. Víctor ahorra \$1.00 por cada \$4.00 que gasta.
III. Javier corre diario 5 vueltas en una pista de 1 km de longitud.
IV. En la juguetería venden 10 canicas por \$20.00.

2 En grupo, comparen sus respuestas y propongan dos situaciones distintas que se expresen con la gráfica de la figura 1.4.4.

Glosario

MB.
Símbolos del prefijo mega y de la unidad de información que se utiliza en computación, byte.

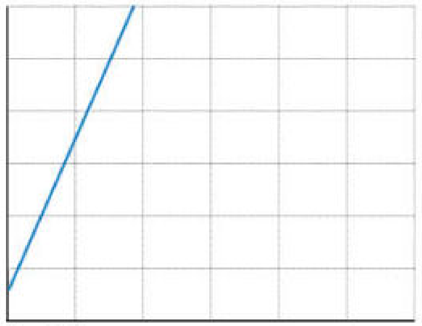


Fig. 1.4.5.

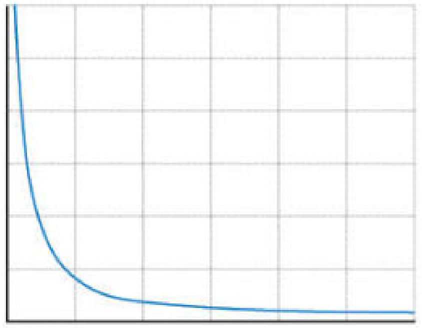


Fig. 1.4.6.

Representaciones proporcionales y no proporcionales

1 En parejas, determinen si en las siguientes situaciones hay una relación de proporcionalidad directa. Para cada caso justifiquen su respuesta en su cuaderno.

a) La gráfica de la figura 1.4.5 muestra el pago por la cantidad de MB de Internet que se consumen en una casa.

b) La expresión $S_n = 1.05\ S_v$ determina anualmente el sueldo de una persona a partir de su sueldo anterior.

c) La tabla 1.4.6 muestra las cuotas en un estacionamiento.

Tiempo (min)	Costo (pesos)
15	6
30	12
45	18
60	24

Tabla 1.4.6.

d) La gráfica de la figura 1.4.6 corresponde al tiempo que se requiere para armar una televisión, dependiendo del número de trabajadores que intervengan.

2 Comparen y comenten sus respuestas con otras parejas. En grupo, verifiquen sus respuestas y corrijan sus errores.

Reflexiona

1. En parejas, respondan y realicen en su cuaderno lo siguiente.
   a) ¿La expresión algebraica $y = -3x$ representa una relación de variación proporcional entre las variables? ¿Por qué?
   b) ¿Cómo es la gráfica de esa expresión?
   c) Determinen una situación que se represente con la expresión $y = -3x$.
2. En grupo, comparen y comenten sus respuestas. Concluyan qué relación hay entre las variables de la expresión $y = -3x$.

Regresa y revisa

1 En equipos, lean nuevamente la situación inicial y propongan en su cuaderno una situación en la que exista la misma relación que hay entre la cantidad de agua derramada a causa de la gotera y el tiempo transcurrido.

5. Tablas y expresiones algebraicas de relaciones cuadráticas

Situación inicial

Población de mosquitos y precipitación pluvial

En un centro de investigación se estudia la relación entre el número de mosquitos que se desarrollan en una determinada zona y la precipitación pluvial. ¿En qué momento, respecto a la precipitación pluvial, la cantidad de mosquitos es mayor según la tabla 1.5.1?

Analiza

1. En parejas, realicen lo siguiente.
   a) ¿Cómo varía el número de mosquitos conforme la precipitación pluvial aumenta de 1 a 4 pulgadas? ______
   b) ¿Qué sucede con el número de mosquitos cuando la precipitación pluvial aumenta de 6 a 10 pulgadas? ______
   c) ¿La relación entre las variables es proporcional? ¿Por qué? ______
   d) ¿Cuál de las expresiones algebraicas representa la relación entre las pulgadas de precipitación pluvial y el número de mosquitos?
      - $y = x^2$
      - $y = 10x - x^2$
      - $y = x^2 - 10x$
      - $y = 10x^2 - 1$
   e) Completen las tablas 1.5.1 y 1.5.2 a partir de la expresión que determinaron en el inciso anterior.
   f) En grupo, discutan las respuestas anteriores y verifiquen que sean correctas. Calculen el número de mosquitos que se desarrollarían con 10.5 pulgadas de precipitación pluvial y determinen qué significa ese valor en el contexto del problema.

Precipitación pluvial (pulgadas)	Número aproximado de mosquitos (miles)
0	0
1	
2	16
3	
4	24
5	
6	24
7	21
8	16
9	9
10	0

Tabla 1.5.1.

Precipitación pluvial (pulgadas)	Número aproximado de mosquitos (miles)
0.5	
2.5	
4.5	
6.5	
8.5	

Tabla 1.5.2.

Explora y construye

Representación de relaciones cuadráticas

Fig. 1.5.1.

1 En parejas, analicen la siguiente situación y realicen lo que se pide.

En el laboratorio de Física, Paulina dejó caer un balín y tomó una fotografía estroboscópica del experimento, como la de la figura 1.5.1, en la que cada exposición corresponde a una décima de segundo.

a) A partir de la figura 1.5.1 completen la tabla 1.5.3.

b) ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la relación entre el tiempo transcurrido y la distancia que recorrió el balín? ¿Por qué? ______

- $d = 5t$
- $d = t^2 + 5$
- $d = 5t^2 + 5$
- $d = 5t^2$

c) Comparen su respuesta con la de otra pareja, argumenten su elección y completen la tabla 1.5.4 con la expresión que eligieron.

Tiempo (segundos)	Distancia (centímetros)
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	

Tabla 1.5.3.

d) Una piedra que se deja caer en un pozo seco tarda 2.6 s en golpear el fondo. Si suponemos que la piedra cae con la misma rapidez que el balín del experimento de Paulina, ¿cuál es la profundidad del pozo? Justifiquen su respuesta. ______

Tiempo (segundos)	Distancia (centímetros)
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 1.5.4.

e) Si el pozo tuviera el doble de profundidad, ¿cuánto tiempo tardaría en caer la piedra? ¿Por qué? ______

f) En 1970 se inició la perforación de uno de los pozos más profundos construidos por el ser humano, localizado en la península de Kola, Rusia, que en 1983 tenía una profundidad de 12 km. Si se dejara caer una piedra, ¿cuánto tiempo tardaría en llegar al fondo del pozo? Justifiquen su respuesta. ______

Fuente: https://www.ecured.cu/Pozo_Kola

2 En equipos, analicen la siguiente situación y realicen lo que se indica.

Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 100 m/s. En la tabla 1.5.5 se muestran algunos de los valores de la altura que alcanzó con respecto al tiempo.

Tiempo (s)	Altura (m)	Tiempo (s)	Altura (m)
1	95	11	
2	180	12	
3	255	13	
4	320	14	
5	375	15	
6		16	
7		17	255
8		18	180
9		19	95
10		20	0

Tabla 1.5.5.

a) Determinen cuál de las siguientes expresiones relaciona el tiempo transcurrido con la altura del proyectil. Justifiquen su elección. ______

- $h = 100t - 5t^2$
- $h = 100t + 5t^2$
- $h = 5t^2 - 100t$
- $h = 5t^2 + 100t$

b) Completen la tabla.

c) ¿Qué altura alcanzará el proyectil a los 8.5 s después del lanzamiento? ______

d) ¿Cuál fue la altura máxima del proyectil y cuánto tiempo transcurrió desde su lanzamiento hasta que alcanzó esa altura? ______

3 En grupo, discutan sus respuestas y corrijan los errores que se presenten. Determinen con qué expresión algebraica se determina la distancia que recorre una piedra, si se lanza verticalmente en un pozo, con una rapidez inicial de 5 m/s.

4 En parejas, lean y contesten lo siguiente.

En un laboratorio de investigación, en condiciones óptimas un tipo de bacterias se reproduce como se muestra en la tabla 1.5.6.

Cantidad inicial de bacterias	Cantidad de bacterias al transcurrir 60 min
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50

Tabla 1.5.6.

a) Expresen algebraicamente la relación entre la cantidad inicial de bacterias y la cantidad después de 60 min. ______

b) Comparen con otra pareja la expresión que encontraron, expliquen cómo la obtuvieron y empleen los valores de la tabla para verificar que sean correctas.

c) Si en un vidrio de reloj inicialmente había 7 bacterias, ¿cuántas habrá después de 60 min? ______

d) Si, en otro vidrio de reloj, después de 60 min hay 242 bacterias, ¿cuántas había inicialmente? Justifiquen su respuesta. ______

5 En equipos, analicen el problema y respondan.

Una de las fotocopiadoras de la empresa donde Lety trabaja se descompuso y cuando hace una copia, la reproducción es mucho más grande que la original. En la tabla 1.5.7 se muestra la medida del área de los cuadrados que obtuvo al fotocopiar algunos cuadrados de distinto tamaño, trazados en una hoja de papel.

Longitud del lado del cuadrado original (cm)	Área del cuadrado en la fotocopia (cm^2)
1	9
1.5	
2	36
2.5	
3	81
3.5	
4	144
4.5	
5	225

Tabla 1.5.7.

a) ¿Cuál expresión algebraica representa la relación entre la longitud del cuadrado antes de la reproducción y su área después de la reproducción? ______
b) Utilicen la expresión que determinaron para completar la tabla.
c) Lety fotocopió el dibujo de otro cuadrado y el área de la reproducción fue de 5 184 cm^2. ¿Cuánto mide de lado el dibujo original? ¿Por qué? ______
d) Lety quiere fotocopiar una estampa cuadrada, pero necesita que cada lado de la reproducción mida 4 cm. ¿De qué tamaño debe ser la estampa original? Justifiquen su respuesta. ______
e) Comparen sus respuestas con las de otras parejas y discutan el procedimiento con el que obtuvieron la expresión que representa el problema.

6 En grupo, comparen y comenten sus resultados. Determinen las posibles soluciones de la expresión algebraica que utilizaron para resolver el inciso c) y expliquen por qué sólo una solución es la respuesta correcta.

7 En parejas, analicen la situación y contesten en su cuaderno.

El abulón rojo es un caracol marino cultivado para el consumo humano. El tiempo en que el animal alcanza 80 mm, en términos de la temperatura a la que se encuentra el cultivo, se representa con la ecuación $M = 0.20t^2 - 6.8t + 97.8$, donde M es el tiempo medido en meses y t, la temperatura del cultivo.

a) Con la igualdad anterior completen la tabla 1.5.8; pueden usar calculadora.
b) Si un abulón rojo se cultiva a 12 °C, ¿en cuántos meses medirá 80 mm?
c) ¿Y si se cultiva a 21 °C?
d) Si un abulón rojo tardó 41.8 meses en medir 80 mm de largo, ¿a qué temperatura se cultivó?
e) ¿Cuál es la temperatura a la que el abulón rojo alcanza 80 mm en el menor tiempo posible?
f) Comparen sus respuestas con las de otra pareja, verifiquen que sean correctas y discutan la utilidad de completar la tabla 1.5.8 para responder.

Temperatura (°C)	Tiempo necesario para que el abulón rojo mida 80 mm (meses)
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Tabla 1.5.8.

8 En grupo, comparen sus resultados y expliquen la utilidad de representar en una tabla los valores obtenidos a partir de la expresión algebraica que representa un problema.

9 En parejas, analicen la siguiente situación y respondan.

Rosy fabrica manteles de tela redondos y cuadrados. El costo de un mantel depende de su tamaño y cada metro cuadrado lo vende a $125.00.

a) Escriban una expresión que represente el área de un mantel cuadrado. ______
b) Anoten una ecuación para el precio de un mantel cuadrado. ______
c) ¿Qué expresión representa el área de un mantel redondo? ______
d) ¿Cuál es la ecuación que expresa el precio de un mantel redondo? ______
e) Completen la tabla 1.5.9.

Manteles cuadrados			Manteles redondos		
Medida de lado (m)	Cantidad de tela utilizada (m^2)	Costo del mantel (pesos)	Radio (m)	Cantidad de tela utilizada (m^2)	Costo del mantel (pesos)
0.80			0.60		
1.00			0.80		
1.20			1.00		
1.40			1.20		
1.60			1.40		

Tabla 1.5.9.

f) Determinen las medidas de los siguientes manteles de acuerdo con su forma y su precio de venta. Justifiquen su respuesta en el cuaderno.

- Mantel cuadrado: $405.00. ____________
- Mantel cuadrado: $500.00. ____________
- Mantel redondo: $883.57. ____________
- Mantel redondo: $1 005.31. ____________

10 En grupo, comenten sus resultados y determinen de qué tipo es la ecuación que representa la relación entre las dimensiones de un mantel y su costo.

Reflexiona

1. En equipos, analicen la tabla 1.5.10 y elijan la expresión algebraica que la representa.
   - $h = -5t + 10t^2$
   - $h = 5t - 10t^2$
   - $h = 10t - 5t^2$
   - $h = 10t + 5t^2$

t	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
h	0	3.2	4.8	4.8	3.2	0	−4.8	−11.2	−19.2	−28.8	−40

Tabla 1.5.10.

   a) Escriban en su cuaderno una situación que se pueda representar con esos valores.
2. En grupo, compartan sus respuestas y verifiquen que sean correctas.

Regresa y revisa

1 En equipos, regresen a la situación inicial y hagan lo siguiente en su cuaderno.
a) Determinen qué precipitación pluvial es necesaria para que haya aproximadamente 24 360 mosquitos. Justifiquen su respuesta.
b) Comparen su respuesta con la de otro equipo y analicen cuántas posibles respuestas hay.

2 En grupo, expliquen por qué en algunas situaciones hay una sola respuesta posible y en otras, hay dos posibles respuestas.

Resuelve y practica

1. En parejas, escriban en su cuaderno una expresión algebraica para cada uno de los siguientes problemas.
   a) El largo de un rectángulo es dos unidades mayor que su ancho. ¿Cuál es su área?
   b) Andrea quiere forrar una libreta por los dos lados. Para cada lado necesita un pedazo de papel que mida dos centímetros más del ancho de la libreta y dos centímetros más del largo. Si el largo de la libreta es de 5 cm más que su ancho, ¿cuánto papel, en términos del área, necesita?
2. En grupo, comparen sus expresiones y verifiquen que sean correctas; corrijan los errores que se presenten.

6. Escala de probabilidad

Situación inicial

Probabilidad de lluvia

El Servicio Meteorológico Nacional anunció que la probabilidad de lluvia en el Golfo de México para cada día de la semana sería de 50%. Si en los primeros seis días no llovió, ¿qué es más probable que suceda en el séptimo día: que llueva o que no llueva?

Analiza

1. En parejas, respondan lo siguiente.
   a) ¿Qué significa que la probabilidad sea de 50%? ____________
   b) Expresen la probabilidad de lluvia como número decimal. ____________
   c) Si el primer día de la semana no llueve, ¿qué es más probable que ocurra el segundo día: que llueva o que no llueva? ¿Por qué? ____________
   d) Si por el contrario, el primer día llueve, ¿qué es más probable en el segundo día? ____________
   e) Si desconocieran el pronóstico del estado del tiempo de los siguientes seis días, es decir, si no saben si lloverá o no, ¿qué es más probable que suceda el séptimo día? Justifiquen su respuesta. ____________

Explora y construye

Representación y escala de la probabilidad

1 En parejas, respondan en su cuaderno.
a) ¿Qué es un experimento aleatorio?
b) ¿A qué se llama evento de un experimento aleatorio?
c) ¿Cómo se obtiene la probabilidad teórica de un evento?

2 En grupo, comenten y verifiquen sus respuestas. Corrijan y discutan los errores que se presenten.

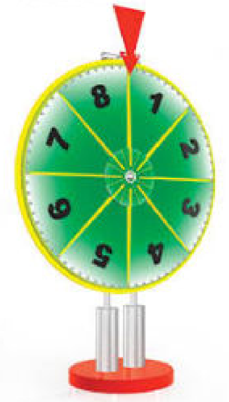


Fig. 1.6.1.

3 En equipos, analicen los siguientes juegos de azar de una kermés y respondan.

"La ruleta" consiste en elegir un número de una ruleta, como la que muestra la figura 1.6.1, y hacerla girar. Cuando la ruleta se detiene, la flecha indica el número ganador.

a) ¿Cuáles son todos los resultados posibles del juego? ____________

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama *espacio muestral*. Este conjunto, así como también los elementos de un *evento* en un experimento aleatorio, se escriben entre llaves ({ }).
Por ejemplo, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es el espacio muestral que se obtiene al lanzar un dado cúbico numerado del 1 al 6 y considerar el número de la cara superior. En ese mismo experimento, el evento N: "Número par" se denota como $N = \{2, 4, 6\}$.

La *probabilidad*, P, de que un evento X ocurra se indica por lo común como $P(X)$. Por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar el dado el resultado sea un número par es $P(N) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b) Escriban los resultados posibles del juego "La ruleta" que pertenecen a los siguientes eventos y calculen la probabilidad de que ocurra cada uno. Expresen ésta como fracción y como número decimal.

- V: Es mayor que 5. ____________ $P(V)$ = ____________
- W: Es menor o igual a 3. ____________ $P(W)$ = ____________
- X: Es múltiplo de 3. ____________ $P(X)$ = ____________
- Y: Es mayor que 0. ____________ $P(Y)$ = ____________
- Z: Es el número 9. ____________ $P(Z)$ = ____________

4 En parejas, analicen otro juego de azar de la kermés y respondan.

En el juego "Monedado" se lanza una moneda al mismo tiempo que un dado cúbico numerado del 1 al 6. Para ganar el juego, la cara superior de la moneda debe caer águila y la del dado en un número mayor o igual a 4.

a) Escriban el espacio muestral del juego. ____________

b) Sandra, la encargada del juego, afirma que la probabilidad de ganar es de 25%. ¿Qué significa ese porcentaje? ¿Está en lo correcto? Justifiquen su respuesta.

c) Determinen la probabilidad, expresada como porcentaje, de obtener uno de los siguientes resultados: (sol, 2), (sol, 4), (águila, 3) o (águila, 6). ____________

5 En grupo, compartan y validen sus respuestas. Si consideran que sus respuestas son correctas, justifíquenlas, y si son erróneas, corríjanlas.

6 En parejas, analicen la siguiente situación. Discutan y respondan las preguntas.

Julia quiere participar en el sorteo de un balón de futbol, para el que se venderán 50 boletos numerados del 1 al 50.

a) ¿Cuántos boletos tendría que comprar para asegurarse de ganar el balón? ¿Por qué? ____________

b) ¿Cuántos boletos debería comprar para que la probabilidad de ganar el balón sea de $\frac{6}{5}$? ¿Tiene sentido esa situación? Justifiquen su respuesta. ____________

c) Iván, un amigo de Julia, asegura que la probabilidad de que él gane el balón es de 0%. ¿Cuántos boletos compró Iván? Expliquen su respuesta. ____________

Busca en...
www.edutics.mx/4uJ donde podrás usar ruletas y observar la frecuencia con que ocurren eventos correspondientes a ellas. (Consulta: 20 de enero de 2019).

7 Comenten y justifiquen sus respuestas con otra pareja.

Un *evento seguro*, en un espacio muestral, es el que sucederá con certeza; por el contrario, un *evento imposible* es aquel que no puede suceder.
La *escala* de la probabilidad son los valores obtenidos al calcular la probabilidad de los eventos, y va de 0 a 1. Esto significa que la probabilidad de los eventos, para esta escala, se expresa como un número decimal o como fracción.

8 En parejas, respondan y justifiquen sus respuestas.

a) ¿Cuál es la probabilidad correspondiente a un evento seguro? ____________

b) ¿Cuál es la probabilidad correspondiente a un evento imposible? ____________

c) ¿Tiene sentido que la probabilidad de un evento sea un número negativo? ____________

9 En grupo, verifiquen que sus respuestas sean correctas y corrijan los errores que se presenten.

Tipos de eventos

1 En equipos, analicen el siguiente experimento aleatorio.

En una urna hay 13 pelotas idénticas con números marcados del 1 al 13. Matías extrae sin ver una de las pelotas, observa el número y la regresa a la urna.

a) Escriban los posibles resultados de los siguientes eventos.

- A: El número mostrado es un número primo. ____________
- B: El número mostrado es un múltiplo de cuatro. ____________

b) Comparen los dos eventos anteriores. ¿En qué se parecen y en qué difieren? ¿Qué pueden concluir respecto a sus elementos? ______

Cuando dos o más eventos no comparten elementos, es decir, no tienen posibles resultados en común, se llaman *eventos mutuamente excluyentes*.
Por ejemplo, los eventos A y B anteriores son mutuamente excluyentes.

c) Determinen los elementos de los siguientes eventos.

- C: El número mostrado es par. ______
- D: El número mostrado es impar. ______
- E: El número mostrado es par o impar. ______

d) Comparen los elementos de los eventos C y D. ¿Cómo son entre sí? ¿Qué similitudes y diferencias hay entre ellos? ______

Si dos eventos de un experimento aleatorio son mutuamente excluyentes y, además, los resultados de ambos forman todo el espacio muestral del experimento, se dice que los *eventos son complementarios*. Para denotar el complemento de un evento se utiliza el símbolo ^{c}, una pequeña letra "c" arriba a la derecha de la letra que representa al evento.
Por ejemplo, los eventos anteriores C y D son complementarios: el complemento de C es D, ($C^{c} = D$), y el complemento de D es C, ($D^{c} = C$).

e) Determinen la probabilidad de ocurrencia de los eventos C y D juntos. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

2 En grupo, comparen sus respuestas y verifiquen que sean correctas. Corrijan y discutan los errores que se presenten. Concluyan cuál es la probabilidad de ocurrencia de un evento formado al unir dos eventos complementarios.

3 En parejas, analicen el siguiente problema y respondan.

Aurora y Tania juegan a los dados: lanzan dos dados cúbicos iguales, numerados del 1 al 6, y suman los números de las caras superiores. En los primeros cinco lanzamientos, las sumas de Aurora fueron 9, 9, 10, 10 y 12, mientras que las de Tania, 2, 4, 5, 3 y 2.

a) ¿Quién tiene más probabilidad de obtener un número mayor que 8 en el sexto lanzamiento? ¿Por qué? ______

b) En un primer lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea un número mayor que 8? ______

c) ¿Y cuál es la probabilidad de que al tercer lanzamiento la suma sea un número mayor que 8? ______

d) Comparen sus respuestas con las de otra pareja y concluyan cómo el resultado de un lanzamiento se relaciona con el del lanzamiento siguiente.

Cuando el resultado de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro, se dice que ambos son *eventos independientes*.
En la situación anterior, por ejemplo, el resultado de lanzar los dos dados no afecta la probabilidad del siguiente; entonces cada lanzamiento es un evento independiente de los demás.

Reflexiona

1. Responde en tu cuaderno y luego en grupo discutan sus respuestas.
   a) Si dos eventos, A y B, son independientes, ¿pueden ser, además, mutuamente excluyentes?, ¿pueden ser complementarios? Justifica tu respuesta.

Regresa y revisa

1 En parejas, lean de nuevo la situación inicial y contesten en su cuaderno.
a) ¿Cuál es el espacio muestral de esa situación?
b) Determinen si los eventos son mutuamente excluyentes, complementarios o independientes. Argumenten su respuesta.

2 En grupo, comparen y discutan sus respuestas. Corrijan si es necesario.

Resuelve y practica

1. Analiza el siguiente experimento aleatorio y responde en tu cuaderno.
   En una urna hay 8 canicas iguales, pero de distinto color: 2 blancas, 2 verdes, 1 amarilla, 1 roja, 1 azul y 1 anaranjada. Se saca una canica al azar, se anota su color y se regresa a la urna.
   a) Sugiere tres eventos mutuamente excluyentes.
   b) Da un ejemplo de dos eventos complementarios.
   c) Menciona dos eventos independientes.
2. Analiza los experimentos aleatorios y eventos que se indican. Explica en tu cuaderno qué tipo de evento es cada uno.
   a) Se lanzan dos monedas a la vez y, cuando caen, se consideran sus caras superiores:
   Evento A = {sol, águila}; evento B = {águila, águila}.
   b) Se lanzan tres monedas juntas y se consideran sus caras superiores:
   Evento C = {sol, águila, sol}; evento D = {águila, sol, águila}.
   c) Se lanzan tres dados cúbicos iguales, numerados del 1 al 6, y se suman los números de las caras superiores.
   Evento E: La suma es un número menor o igual a 2; evento F: La suma es un número mayor o igual a 3.
3. En grupo, comenten sus respuestas. Discutan y corrijan los errores que se presenten.

Toma nota

Localiza los términos "eventos mutuamente excluyentes", "eventos complementarios" y "eventos independientes" en el glosario (págs. 256-258) y anota con tus propias palabras una explicación y un ejemplo de cada uno.

7. La opinión de los demás

Situación inicial

Un nuevo guisado

La encargada del comedor de una escuela secundaria quiere ofrecer un nuevo guisado, pero debe elegir sólo una de cuatro propuestas. ¿Cómo podría determinar cuál sugerencia conviene para asegurar que los estudiantes acepten el nuevo guisado?

Analiza

1. En equipos, respondan en su cuaderno.
   a) Escriban dos o tres criterios diferentes para la elección de una propuesta.
   b) Expliquen por qué la opinión de los estudiantes respecto a las propuestas es relevante.
   c) ¿Qué información de los estudiantes es útil conocer para elegir el guisado? ¿Por qué?
   d) Propongan un procedimiento para conocer la opinión de los estudiantes.
2. En grupo, expongan sus procedimientos y en plenaria discutan las ventajas y desventajas de cada uno.

Explora y construye

Encuesta y población en estudio

1 En grupo, comenten lo que entienden por los siguientes términos y escriban una definición con ayuda del profesor.

a) Encuesta: ____________________

b) Población en estudio: ____________________

2 En equipos, lean de nuevo la situación inicial y respondan.

a) ¿Cuál es la utilidad de una encuesta para determinar qué propuesta elegir?
____

b) ¿Será útil conocer la opinión de los vecinos de la escuela acerca de las propuestas? ¿Por qué? ____________________

c) Supongan que la escuela del problema es la suya. ¿Cuál es la población en estudio y cuántos individuos la integran? ____________________

d) ¿Será necesario conocer la opinión de todos los miembros de la población en estudio o sólo de una parte? ¿Por qué? ____________________
____

3 En grupo, compartan sus respuestas y discutan la utilidad de las encuestas. Mencionen situaciones que requieran encuestas y señalen la población en estudio que les correspondan. Discutan, en cada caso, si es necesario considerar a toda la población o solo a una parte.

Muestras representativas

1 En equipos, lean lo siguiente y respondan.

En julio y agosto de 2010 se llevó a cabo la Encuesta nacional de hábitos, prácticas y consumo culturales organizada por el Consejo Nacional para la Cultura y las Artes (Conaculta), en la que de manera aleatoria se entrevistó a 32 000 habitantes de la República Mexicana mayores de 13 años.

Algunos de los resultados indican que 97% de los entrevistados tienen al menos un televisor en casa; 86%, un radio, y 32%, una computadora; 90% acostumbra ver la televisión (de éstos 40% lo hace más de dos horas al día, 23% ven noticiarios y 21%, telenovelas), 76% escucha radio y 32% es usuario de Internet.

Fuente: www.conaculta.gob.mx/encuesta_nacional/

Glosario

consumo cultural. Referente al consumo de objetos o servicios con contenido cultural, como libros y películas.

a) Si en 2010 en México había aproximadamente 82 millones de habitantes mayores de 13 años, ¿qué porcentaje de la población en estudio se entrevistó en la encuesta? ____________________

b) A partir de su respuesta anterior y de que la encuesta fue aleatoria, ¿es posible generalizar los resultados, es decir, considerar que los porcentajes representan a todos los habitantes del país? Argumenten su respuesta en su cuaderno.

c) Elaboren individualmente en su cuaderno una lista de las ventajas y desventajas de encuestar a toda la población en estudio en comparación a una fracción de ella. Compartan y discutan sus respuestas con su equipo y escriban dos ventajas y dos desventajas para cada caso.

- La encuesta se realizó a toda la población en estudio. ____________________
  ____
- La encuesta consideró a una fracción de la población en estudio. ____________________
  ____

d) Anoten una situación en la que sea posible encuestar a toda la población en estudio y otra en la que no sea así. Justifiquen su respuesta. En ambos casos determinen la población en estudio. ____________________
____

Una *muestra* es cualquier subconjunto de una población en estudio; por ejemplo, una persona o un grupo.

Una *muestra representativa* es la parte de la población en estudio que se considera para estimar las características de todo el conjunto.

2 En equipos, respondan y realicen lo siguiente en su cuaderno.

a) Determinen el objetivo de las siguientes encuestas, la población en estudio en cada caso y las muestras que son representativas. Justifiquen su elección.

- Se encuestó a una fracción de la población para conocer cuáles equipos de futbol prefieren los mexicanos.
  Muestra A: 5 000 personas afuera de un estadio de futbol.
  Muestra B: 500 personas afuera de 20 distintos estadios de futbol.
- Se quiere saber cuántas horas, en promedio, hacen ejercicio por día las personas mayores de 25 años en el estado de Chihuahua.
  Muestra C: 500 personas en 15 distintos centros deportivos del estado de Chihuahua.
  Muestra D: 4 500 personas en las calles de tres ciudades de esa entidad.

3 En grupo, discutan sus respuestas y corrijan los errores.

4 En equipos, analicen las siguientes maneras de elegir una muestra, determinen en qué consisten y concluyan con cuáles se obtendría una muestra representativa. Justifiquen su respuesta.

- Los encuestados son voluntarios.
- Los participantes son conocidos del encuestador (quien hace la encuesta).
- Los encuestados se eligen mediante un proceso aleatorio.

Tipos y presentación de preguntas

1 En equipos, discutan las similitudes y diferencias entre los siguientes tipos de preguntas que dos compañías de productos deportivos hicieron en una encuesta.

Compañía A	Compañía B
• Sexo: ( ) Masculino ( ) Femenino • Ocupación: ( ) Empleado ( ) Ama de casa ( ) Estudiante ( ) Desempleado ( ) Trabaja por su cuenta ( ) Comerciante • Edad: ( ) Menor de 12 años ( ) De 13 a 18 años ( ) De 19 a 30 años ( ) De 31 a 45 años ( ) Mayor de 45 años • ¿Cada cuándo hace ejercicio? ( ) Todos los días ( ) De 3 a 5 veces por semana ( ) 1 o 2 veces a la semana ( ) No hago ejercicio. • ¿Cuál es la actividad deportiva que prefiere? ( ) Futbol ( ) Basquetbol ( ) Atletismo ( ) Natación ( ) Otro	• Sexo: ____ • Ocupación: ____ • Edad: ____ • ¿Con qué frecuencia hace ejercicio o practica algún deporte? ____ • ¿Cuál es la actividad física o deportiva que prefiere? ____

2 En grupo, comenten y discutan sus conclusiones.

Las preguntas de una encuesta se clasifican en dos tipos:
Si la respuesta a una pregunta debe seleccionarse de una lista (opción múltiple), se trata de una *pregunta cerrada*.
Por ejemplo, • Edad: ( ) Menos de 13 años ( ) 13 años ( ) Más de 13 años
Si la respuesta a una pregunta es libre se denomina *pregunta abierta*.
Por ejemplo, • Edad: ____

3 En equipos, realicen lo siguiente.

a) Propongan dos preguntas cerradas y dos preguntas abiertas que plantearían en una encuesta. ____

b) Discutan las ventajas y desventajas de cada tipo de pregunta y anótenlas a continuación. ____

4 En equipos, analicen las siguientes preguntas de una encuesta y realicen lo que se indica.

- En su gestión como legislador, el candidato Bermejo trabajó en favor de los jóvenes, y por ello la mayoría piensa que es el candidato ideal para ocupar la presidencia municipal. ¿Cuál es su candidato favorito para presidente municipal?
- Si en este momento fueran las elecciones para presidente municipal, ¿por quién votaría?
- ¿Cuántos libros ha leído durante el último año?
- Todos los habitantes de esta región han leído más de 3 libros en el último año. ¿Cuántos libros ha leído en el último año?

a) Discutan las similitudes y diferencias entre las preguntas. Determinen cuáles pueden influir en la respuesta del encuestado. ____

b) Escriban una pregunta que pueda alterar la respuesta del encuestado y una que no lo haga. Expliquen sus propuestas. ____

c) ¿De qué manera alterar la opinión del encuestado afecta los resultados de la encuesta? ____

5 Comparen sus preguntas y respuestas con las de otros equipos. Determinen cómo plantear las preguntas de una encuesta para evitar que se altere la opinión del encuestado. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Realización de una encuesta

1 En equipos, hagan lo que se indica para realizar una encuesta en su escuela o localidad. Justifiquen sus respuestas y, antes de iniciar la encuesta, verifíquenlas en grupo con apoyo del profesor.

a) Establezcan la población en estudio. Elíjanla de manera que puedan encuestar al menos 10% de la población.
b) Mencionen cinco o más características u opiniones que quisieran conocer de la población y elijan dos de ellas.
c) Determinen cuántos individuos entrevistarán en la encuesta. Si la encuesta no incluirá a toda la población, es decir, será una muestra, indiquen cómo elegirán a los encuestados; asegúrense de que sea una muestra representativa.
d) Escriban las preguntas abiertas o cerradas que harán para obtener la información. Cerciórense de que la redacción no influya en la opinión del encuestado.
e) Definan cómo registrarán la información que obtengan.
f) Acuerden cómo se dividirá el trabajo entre los integrantes del equipo. Por ejemplo, cada uno puede encuestar a una parte de la muestra representativa o de la población, y después agrupar la información en una base de datos.

Glosario
base de datos. Organización de datos que agiliza la consulta de información.

Representación y análisis de datos

1 En los mismos equipos que la actividad anterior, respondan y realicen lo siguiente.

a) ¿Qué maneras de representar información (gráficas de barras, circulares, poligonales, histogramas, etcétera) consideran convenientes para presentar los resultados de la encuesta? Argumenten su respuesta. ____________
____
b) Compartan la respuesta anterior con la de otro equipo y determinen qué representaciones, según su información, es más conveniente. ____________
____
c) Anoten en sus cuadernos los resultados de la encuesta. Consideren distintos medios para organizarla, ya sean tablas, esquemas, listas, gráficas, etcétera.
d) Representen en sus cuadernos los resultados de la manera más conveniente.

Toma nota
Localiza el término "muestra representativa" en el glosario (págs. 256-258); con tus propias palabras escribe su definición y un ejemplo.

2 En grupo, calculen las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y respondan.

a) ¿Cuál es la utilidad de calcular las medidas de tendencia central? ____________
____
b) ¿Cuál de ellas es la más representativa de su encuesta? ____________
c) ¿Qué conclusiones pueden obtener de la encuesta que realizaron? ____________
____
____
____

Reflexiona

1. En grupo, respondan.
   a) Si la redacción de una pregunta puede alterar la opinión de las personas, ¿por qué es importante indicar con exactitud, al momento de presentar los resultados, la pregunta que se hizo a los encuestados?

Regresa y revisa

1 En parejas, lean de nuevo la situación inicial y contesten en su cuaderno.

a) ¿Cuál es la población en estudio de esa situación?
b) ¿La encuesta en la escuela secundaria se podría aplicar a todos los estudiantes o sólo a una muestra? Si es una muestra, ¿cómo la determinarían para que fuera representativa? Argumenten su respuesta.
c) ¿Cuántas preguntas y de qué tipo harían a cada encuestado?
d) ¿Qué representación consideran conveniente para presentar los resultados? Justifiquen su respuesta.

2 En grupo, comparen sus respuestas con otras parejas y verifiquen que sean correctas. Corrijan si es necesario.

3 En equipos, con ayuda del profesor, realicen los pasos necesarios para investigar cómo ha evolucionado la obesidad en México en los últimos 10 años y expongan sus resultados ante el grupo.

Observa y relaciona

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi)
Un *censo* es una encuesta cuyo objetivo es obtener información de los habitantes de un país o una región. En México, el Inegi es la institución encargada de realizar el Censo General de Población y Vivienda, y el Conteo de Población y Vivienda para obtener información geográfica y demográfica de los habitantes del país.

1. Investiga y responde.
   a) ¿Cuándo se realizó el primer Censo General de la República Mexicana? ____________
   b) ¿Cuándo se creó el Inegi? ____________
   c) ¿Cuál es la diferencia entre el Censo General de Población y Vivienda y el Conteo de Población y Vivienda? ¿Cada cuándo se llevan a cabo? ¿Qué preguntas contiene cada encuesta? ____________
   ____
   ____
   d) ¿Cuál es el objetivo de obtener información de los habitantes de la República Mexicana? ____________
   ____

Análisis de propiedades en figuras congruentes y semejantes

Platón, filósofo griego que vivió durante los siglos V y IV a. n. e., siguiendo las ideas de otros grandes pensadores de la antigua Grecia, sostuvo que debía existir un elemento primigenio, es decir, algo que diera origen y forma a todas las cosas que existen en el cosmos.

Algunos filósofos de su época buscaron ese primer elemento en lo que percibían a su alrededor. Tales de Mileto aseguraba que todo en la Naturaleza estaba hecho de agua, y Anaxímenes decía que el aire era la parte fundamental de la materia. Más tarde, Empédocles sugirió que eran cuatro los elementos básicos: tierra, agua, fuego y aire, y que éstos se unían y mezclaban gracias a una fuerza, el amor, y se separaban por la fuerza opuesta, el odio, formando o destruyendo todo lo existente. Por su parte, los pitagóricos aseguraban que los números daban origen de todo lo que existe. Así, Platón tomó las ideas más relevantes y las expresó con detalle en *El Timeo*, su obra sobre la Naturaleza.

Platón sostenía que los elementos de Empédocles estaban constituidos por átomos, a los que concebía como minúsculos cuerpos geométricos, cuyas caras se formaban por la unión de dos formas (ideas o estructuras); éstas eran dos triángulos rectángulos: uno isósceles y uno escaleno (figura 1.A.1.).

Fig. 1.A.1.

De acuerdo con el razonamiento de Platón, a cada elemento le correspondía un tipo de cuerpo geométrico de los llamados *sólidos platónicos*; el mundo supralunar, es decir, lo que se encuentra más allá de la órbita de la Luna, estaba constituido por el más enrarecido de todos, el éter o la quintaesencia, como se muestra en la tabla 1.A.1.

Orden	Poliedro	Elemento	Forma de las caras	Número de caras
Primero	Cubo	Tierra	Cuadrado	6
Segundo	Icosaedro	Agua	Triángulo	20
Tercero	Tetraedro	Fuego	Triángulo	4
Cuarto	Octaedro	Aire	Triángulo	8
Quinto	Dodecaedro	Éter	Pentágono	12

Tabla 1.A.1.

Aplica las matemáticas

Sólidos platónicos

En este proyecto construirás con cartulina algunos modelos de los cuerpos geométricos que proponía Platón.

1 Reúne el material que consideres necesario para elaborar tus modelos (cartulina, marcadores, tijeras, pegamento, regla, escuadras, etcétera).

2 Traza en la cartulina triángulos semejantes a los que propuso Platón para completar las caras de los sólidos platónicos que vas a construir.

3 Traza las figuras necesarias para obtener el número de caras, que indica la tabla 1.A.1., para los diferentes elementos. Observa la figura 1.A.2. que representa al elemento tierra (cubo).

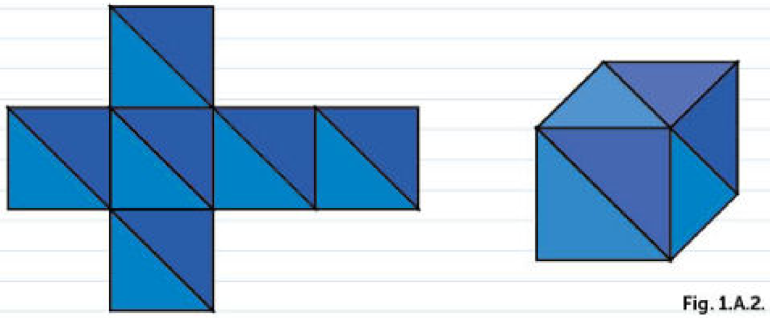


Fig. 1.A.2.

4 Dibuja las pestañas o solapas que se requieran en los extremos de las figuras para unir las caras. Recorta, arma y pega los modelos.

5 Al cubo (tierra) lo conoces muy bien y no tendrás problemas para construirlo. El tetraedro (fuego) es una pirámide de base triangular, cuyas caras y base son triángulos equiláteros. Si decides hacer el octaedro, imagínalo como dos pirámides de base cuadrangular que luego se unen.

Si te animas, con algunos pentágonos regulares podrás construir también el dodecaedro, y como decía Platón, todo tiene su origen en los dos triángulos rectángulos, así que construir un pentágono debe ser fácil, ¡y lo es! Un pentágono está compuesto de 10 triángulos rectángulos escalenos; trázalos con triángulos cuyos ángulos midan 90°, 36° y 54° (figura 1.A.3).

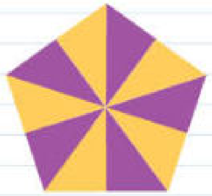


Fig. 1.A.3.

6 Construye dos modelos de diferente tamaño de cada elemento y responde.
a) ¿Qué triángulos son congruentes en los sólidos platónicos que construiste? ¿Cuáles son semejantes?

b) ¿Qué opinas sobre la idea de Platón al creer que todo (hasta lo más bello, sutil o enrarecido) se componía de esos triángulos? Pregunta a tus maestros de Matemáticas o Historia su opinión.

Análisis e identificación de representaciones que corresponden a una relación de proporcionalidad

En esta actividad construirás representaciones gráficas para una tabla de datos y observarás cómo son las gráficas que corresponden a relaciones proporcionales.

Elaboración de tablas de datos

1 Abre una hoja de cálculo y haz lo que se indica para solucionar el siguiente problema.

Martha vende frutas en una escuela. Cada manzana que vende en $3.00, le cuesta $2.00. ¿Cuál es su ganancia si vende 1, 3, 5, 6, 7, 8 y 10 manzanas?

	A	B	C	D	E
1	No. Manzanas	Costo	Reingreso	Ganancia	Cociente
2	1				
3	3				
4	5				
5	6				
6	7				
7	8				
8	10				
9					

Fig. 1.H.1.

- Elabora una tabla con los datos del número de manzanas que vende Martha, como se muestra en la figura 1.H.1. Incluye las columnas para el "Costo" y el "Reingreso".

B3 =(A3*2)/1

	A	B	C	D	E
1	No. Manzanas	Costo	Reingreso	Ganancia	Cociente
2	1	2			
3	3	6			
4	5				
5	6				
6	7				
7	8				
8	10				
9					

Fig. 1.H.2.

- Inserta el costo de una manzana en la celda B2, selecciona la celda B3, y escribe la fórmula: =*(A3*2)* y oprime *Entrar*; aparecerá el valor por la venta de 3 manzanas. Para completar los datos, coloca el cursor sobre la esquina inferior derecha de la celda B3 y, sin soltar el botón primario del ratón, arrastra hacia abajo hasta la fila B8. Con este procedimiento completarás la tabla de manera automática (figura 1.H.2).

SUMA =C2-B2

	A	B	C	D	E
1	No. Manzanas	Costo	Reingreso	Ganancia	Cociente
2	1	2	3	=C2-B2	
3	3	6	9		
4	5	10	15		
5	6	12	18		
6	7	14	21		
7	8	16	24		
8	10	20	30		

Fig. 1.H.3.

- Para el reingreso (el dinero que se obtiene por la venta de las manzanas), coloca el número 3 en la celda C2. En la celda C3 escribe: =*(A3*3)* y oprime *Entrar*; aparecerá el reingreso de la venta de 3 manzanas. Completa la tabla como lo hiciste en el paso anterior.

- Para conocer la ganancia resta el valor del costo al reingreso, para ello selecciona la celda D2 y escribe la fórmula: =*C2-B2* y oprime *Entrar* (figura 1.H.3). Selecciona y arrastra hacia abajo la celda que contiene la fórmula para completar todos los datos de la ganancia.
- Calcula la constante de proporcionalidad de la ganancia, en relación con el costo, como se observa en la figura 1.H.4. Completa los datos de las demás celdas como lo hiciste antes.

	A	B	C	D	E
1	No. manzanas	Costo	Reingreso	Ganancia	Cociente
2	1	2	3	1	=D2/B2
3	3	4	6	2	
4	5	6	9	3	
5	6	8	12	4	
6	7	10	15	5	
7	8	12	18	6	
8	10	14	21	7	

Fig. 1.H.4.

2 Con base en los datos finales de la tabla, responde en tu cuaderno.

a) ¿Cómo es la constante de proporcionalidad para todos los datos?

b) ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?

c) ¿Cómo es una gráfica cuando hay una relación de proporcionalidad?

Representación gráfica de tablas de datos

1 A partir de la tabla del problema anterior, haz lo siguiente.

- Sin seleccionar ningún dato, da clic en el menú *Insertar*, elige la opción *Columna* e inserta una gráfica en 2-D (figura 1.H.5). Después harán las modificaciones que desees.

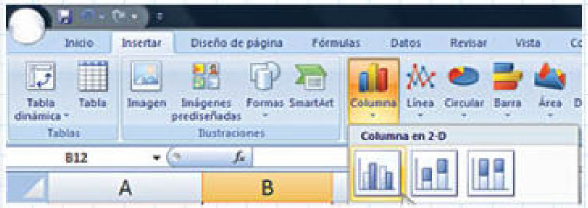


Fig. 1.H.5.

- En la pantalla aparecerá un rectángulo en blanco que es donde irá la gráfica. Para ingresar los datos da clic en la opción *Seleccionar datos* (figura 1.H.6); aparecerá una ventana con el nombre *Seleccionar origen de datos*. En la opción *Entradas de leyenda* selecciona *Agregar*.

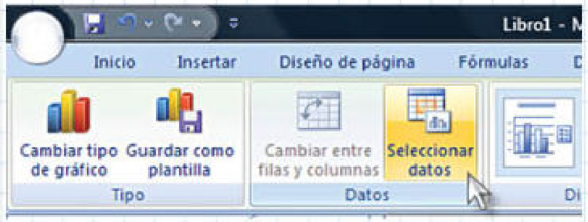


Fig. 1.H.6.

- Asigna el nombre de la serie como "Ganancia" y para los valores de la serie primero elimina lo que aparece en el campo correspondiente y después selecciona las celdas que contienen la información de la ganancia, que en este caso son las celdas D2 hasta D8 (figura 1.H.7).

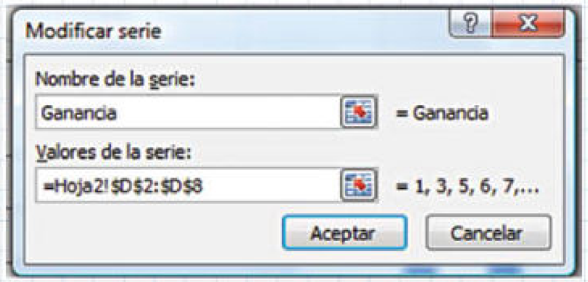


Fig. 1.H.7.

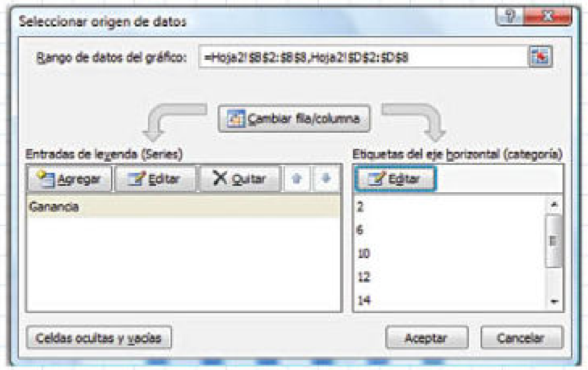


Fig. 1.H.8.

▶ A continuación, para asignar las *Etiquetas del eje horizontal*, da clic en *Editar* y selecciona las celdas que registran la información de costo (figura 1.H.8).

▶ Para visualizar mejor la proporcionalidad, coloca dos gráficas en una, y para ello repite el procedimiento de *Agregar* en *Entradas de leyenda*; obtendrás una gráfica con dos barras por cada valor. Da clic sobre una de las barras y ve de nuevo a menú *Insertar*, ahora elige la opción *Línea* para crear una gráfica de líneas sobre la de barras. Obtendrás una gráfica como la de la figura 1.H.9.

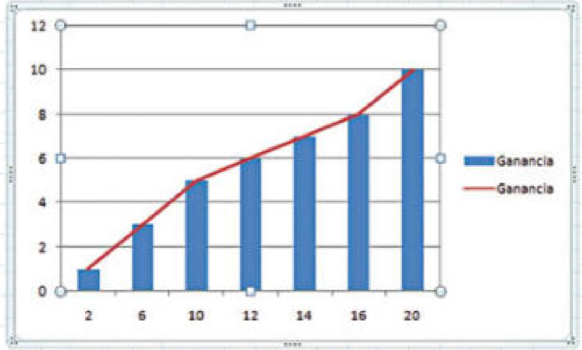


Fig. 1.H.9.

▶ Como observas, la línea que obtienes no es una recta. ¿Esto significa que la relación entre las variables no es proporcional? ¿Crees que algo estuvo mal? Para averiguarlo inserta filas en la tabla de datos considerando los casos en los que Martha vende 2, 4 y 9 manzanas. Completa la tabla con los datos correspondientes.

▶ Al insertar las filas en el sitio correcto, tu gráfico se actualizará automáticamente y obtendrás nuevas gráficas. Reflexiona sobre por qué las gráficas aparecen de esa forma con los primeros y con los últimos datos.

▶ Observa que aunque tus gráficas deberían pasar por el origen, no es así porque las gráficas en la hoja de cálculo parten del primer valor mayor que cero.

2 Con el mismo procedimiento elabora ahora las gráficas de los siguientes casos.

a) La reproducción de un tipo de bacterias que cada hora triplican su población si en la primera hora había dos bacterias (hasta 10 horas).

b) La función que representa la expresión $y = 0.5x$.

- ¿Los dos casos representan incrementos proporcionales?

1 Lee cada uno de los siguientes enunciados.

2 Señala si es falso (F) o verdadero (V).

3 Explica cómo verificarías tu respuesta.

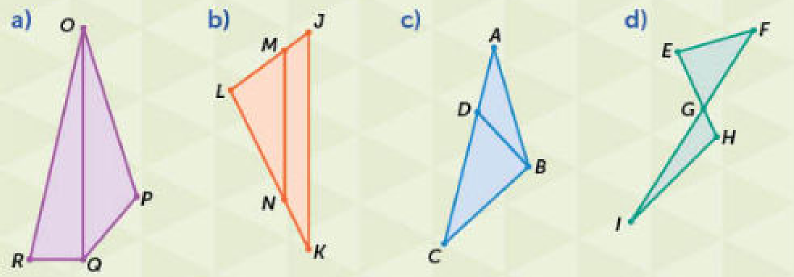
Enunciado	F	V	Propuesta de verificación
a) El largo de la base de un prisma rectangular es tres veces más grande que el ancho, y su altura es de 8 cm. Si su volumen es de 384 cm³, entonces el largo mide 12 cm.			
b) Dos triángulos isósceles tienen el mismo perímetro, por tanto, son congruentes.			
c) Un triángulo que mide 3.6 cm, 4.7 cm y 5.2 cm es semejante a otro de 7.2 cm, 9.4 cm y 2.6 cm.			
d) La expresión algebraica $a = xb + b$ representa una relación de proporcionalidad directa entre a y b.			
e) La relación entre los valores $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 30$, $y_2 = 2\,700$; $x_3 = 60$, $y_3 = 3\,600$; $x_4 = 90$, $y_4 = 2\,700$; $x_5 = 120$, $y_5 = 0$ se puede representar con la ecuación $y = 120x - x^2$.			
f) Si la probabilidad de obtener una bola amarilla de una urna que contiene bolas de colores es de $\frac{6}{10}$, entonces la urna contiene seis bolas amarillas.			
g) Los alumnos de primer grado constituyen una muestra representativa de una secundaria para conocer los hábitos alimenticios de toda la escuela.			

4 En la página 67 revisa qué enunciados son falsos y cuáles verdaderos. Consulta en tu libro los temas de las respuestas erróneas; si es necesario, replantea tus propuestas de verificación y aplícalas.

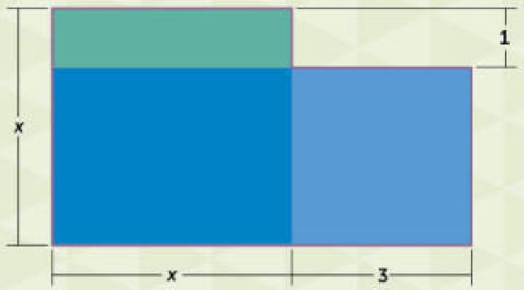
1 El largo de un rectángulo es tres unidades mayor que su ancho, y su área es de 180 cm². ¿Cuáles son sus dimensiones?

a) Largo = −12 m; ancho = −8 m
b) Largo = 8 m; ancho = 12 m
c) Largo = 12 m; ancho = 8 m
d) Largo = 15 m; ancho = 12 m

2 ¿En cuál de las siguientes figuras se pueden observar triángulos semejantes?



3 ¿Cuál es el área de la región sombreada de color azul si el perímetro de toda la figura es de 22 cm?



a) 21 cm²
b) 16 cm²
c) 22 cm²
d) 21 cm²

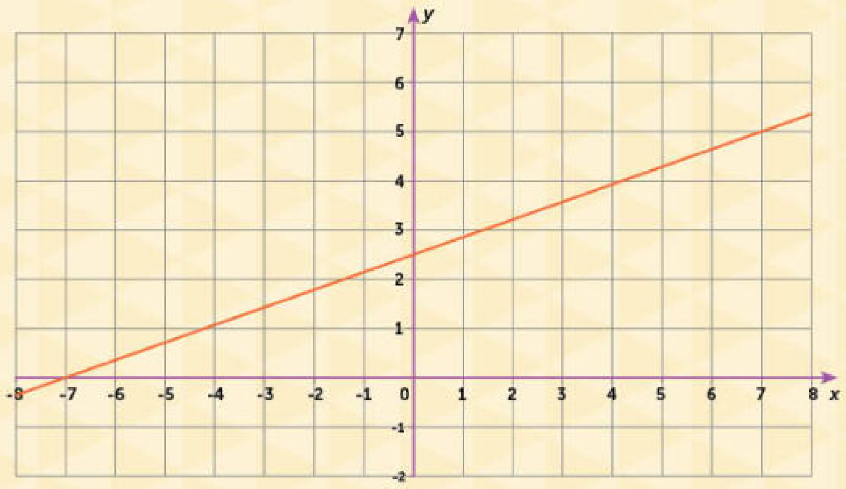
4 En un cajón hay ocho calcetines sueltos: cuatro azules, dos verdes y dos blancos, y se saca uno al azar. ¿Cómo son entre sí los eventos: "tomar un calcetín azul o uno blanco" y "tomar un calcetín blanco o uno verde"?

a) Mutuamente excluyentes.
b) Complementarios.
c) Mutuamente excluyentes y además complementarios.
d) Ninguna de las anteriores.

5 De manera aleatoria se encuestó a la mitad de los estudiantes de un salón de tercer grado. ¿De cuál de las siguientes poblaciones es representativa esa muestra?

a) De los estudiantes de la escuela.
b) De los jóvenes de ese rango de edad de la comunidad.
c) De los estudiantes de ese salón de clases.
d) De los estudiantes de tercer grado.

1 Analiza la gráfica y contesta.



a) Determina qué situaciones es posible representar mediante la gráfica.
- Una lancha se hundió a 7 m de profundidad en un lago. Una grúa sacó la lancha con un ritmo constante hasta una plataforma ubicada a 10 m sobre la superficie, después de 2.5 min de iniciada la operación.
- Un automovilista, que inició su recorrido en el kilómetro 2.5 de una carretera, condujo con rapidez constante y después de 7 s de trayecto se localizaba en el kilómetro 5.
- Un kilogramo de polietileno (un tipo de plástico) se vende a $2.86 y dos kilogramos, a $3.22.
- Una empresa invirtió siete millones de pesos en un proyecto; sus ganancias fueron constantes y después de dos años y medio recuperó la inversión inicial.

b) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas no corresponde a la gráfica? Justifica.
- $8y = 2.88x + 20$ ______________________
- $-5x + 14y = 35$ ______________________
- $y = 0.36x + 2.5$ ______________________
- $y = 0.7x + 5$ ______________________

c) Escribe una situación que se pueda representar con la gráfica. Explica el porqué de tu elección. ______________________

____

____

____

____

Respuestas de la autoevaluación de la página 65. Enunciados falsos: b), c), f), g); enunciados verdaderos: a), d), e).

A

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a la figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Bloque 2

C

Contenidos

Sentido numérico y pensamiento algebraico

- Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Forma, espacio y medida

- Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
- Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.
- Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Manejo de la información

- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

En el arte y el diseño popular el uso de distintos tipos de simetría: axial, central o de rotación son sinónimos de belleza y armonía.

1. ¿Cómo resolver ecuaciones cuadráticas?

Situación inicial

Rollos de malla para cercar un terreno

Luis compró cuatro rollos de malla, cada uno de 50 m, con los que cercó un terreno rectangular de 2 000 m². Si le sobraron 20 m de malla, ¿cuáles son las medidas del terreno?

Analiza

1. En parejas, respondan lo siguiente.
   - **a)** Expliquen su procedimiento para resolver el problema. ______
   - **b)** En grupo, comparen sus resultados y procedimientos. Verifiquen que sean correctos y corrijan los errores. ¿Alguno de sus compañeros empleó un procedimiento que les parezca más ingenioso? De ser así, escríbanlo en su cuaderno.
   - **c)** ¿Con qué expresión o expresiones algebraicas podrían representar el problema? ______
   - **d)** Propongan un procedimiento para resolver el problema a partir de las expresiones anteriores y resuélvanlo. ______
   - **e)** Comparen su resultado y el procedimiento con los del inicio. ¿Obtuvieron el mismo resultado? ¿Por qué? ______

Explora y construye

Ecuaciones de las formas $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 = bx$

1 En parejas, realicen lo siguiente.

a) En sus cursos anteriores de Matemáticas aprendieron a factorizar. Escriban qué significa factorizar y en su cuaderno proporcionen dos ejemplos. ______

b) Factoricen las siguientes expresiones algebraicas.

- $y^2 - y =$ ______
- $5x^2 + x =$ ______
- $15k^2 - 3k =$ ______
- $2z^2 - 6z =$ ______
- $x^2 - 16 =$ ______
- $a^2 + 9a + 8 =$ ______

c) Factoricen los siguientes trinomios.

- $2m^2 + 8m - 10 =$ ______
- $3p^2 + 3p - 18 =$ ______
- $ñ^2 + 6ñ + 9 =$ ______
- $q^2 - 4q + 4 =$ ______

2 En grupo, compartan sus respuestas con otra pareja y discutan los errores que se presenten.

3 En equipo, analicen las siguientes situaciones y contesten.

a) El área de un cuadrado menos 12 veces la medida de su lado es igual a cero.
- ¿Con qué ecuación es posible representar el problema? ______
- ¿Cuál es el perímetro del cuadrado? Justifiquen su respuesta. ______

b) El doble del cuadrado de la edad de Roberto menos 26 veces su edad es igual a cero.
- Representen esta situación con una expresión algebraica. ______
- Si Roberto tiene más de 10 años, ¿cuál es su edad? Justifiquen su respuesta. ______

c) Al elevar un número al cuadrado, multiplicarlo por 3 y después restarle el mismo número multiplicado por 18 el resultado es cero.
- ¿Cuál es ese número? Expliquen el procedimiento que utilizaron. ______

4 En grupo, realicen lo siguiente.

a) Compartan sus resultados y procedimientos con otra pareja.
b) Corrijan y analicen los errores que se presenten.
c) Comenten cómo resolverían las ecuaciones de la actividad anterior con una factorización. Si alguna pareja utilizó ese procedimiento expóngalo ante el grupo.

5 En parejas, respondan lo siguiente.

a) A partir de la igualdad $a \times b = 0$, ¿cuáles pueden ser los valores de las variables a y b? ______

b) Si $p \times (p + q) = 0$, ¿qué valor puede adquirir de la variable p? ______

6 En grupo, comparen sus respuestas con las de otra pareja.

a) ¿En qué se parecen y en qué difieren? ______

b) Discutan la utilidad de la propiedad anterior al resolver ecuaciones mediante factorización y anoten sus conclusiones con apoyo de su profesor. ______

7 En parejas, analicen las siguientes figuras y determinen el valor de las incógnitas. Justifiquen su respuesta.

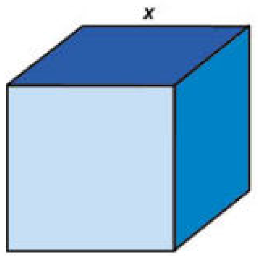


Fig. 2.1.1.

a) Si la superficie total de las caras del cubo es de 96 cm², ¿cuánto mide cada arista? ______

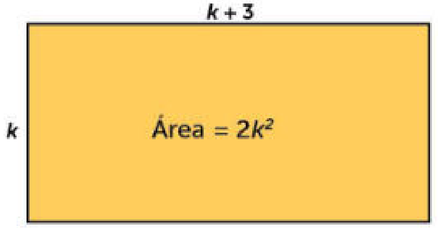


Fig. 2.1.2.

b) ¿Cuánto miden el largo y ancho del rectángulo? ______

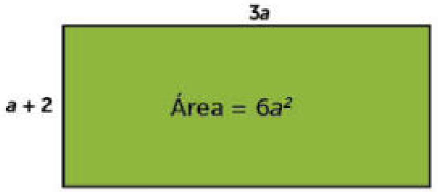


Fig. 2.1.3.

c) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? ______

8 Resuelvan en su cuaderno las siguientes ecuaciones y escriban las soluciones a continuación.

a) $12b + 6b^2 = 0$ Solución o soluciones: ______

b) $15t + 10t^2 = 0$ Solución o soluciones: ______

c) $p \times (-p + 6) = 0$ Solución o soluciones: ______

d) $4j(12j) = 12j$ Solución o soluciones: ______

9 En grupo, comparen los procedimientos y soluciones de distintas parejas. Con ayuda de su maestro verifiquen que sean correctos y corrijan los errores.

Problemas con ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

1 En equipos, realicen lo que se indica.

a) Analicen el rectángulo de la figura 2.1.4 construido a partir de un cuadrado de lado x.

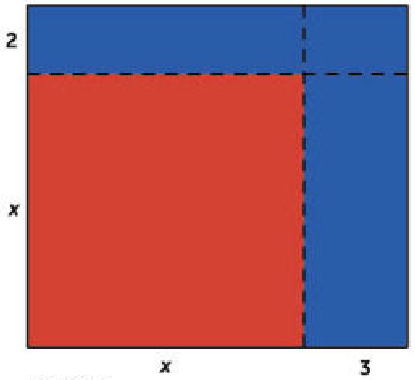


Fig. 2.1.4.

b) Expresen el área del rectángulo como una multiplicación de dos binomios y desarróllenla para obtener un trinomio. ______

c) ¿Cuáles son los coeficientes de la variable cuadrática, de la variable lineal y cuál es el término independiente? ______

d) Analicen las relaciones entre:

- El coeficiente de la variable lineal del trinomio y la suma de los términos independientes de los binomios.
- El término independiente del trinomio y el producto de los términos independientes de los binomios.

e) Escriban sus conclusiones. ______

f) Si el área del rectángulo fuera $x^2 + 4x + 4$, ¿en cuántas unidades habría aumentado cada lado del cuadrado? Justifiquen su respuesta. ______

- Expresen el área del rectángulo como la multiplicación de dos binomios. ______

g) Respondan de nuevo el inciso anterior, ahora suponiendo que el área del rectángulo es $x^2 + 7x + 12$, y después que el área del rectángulo es $x^2 - 4x + 4$. ______

Algunos trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ se pueden factorizar en dos binomios al hallar dos números que sumados sean iguales a b y multiplicados sean iguales a c; es decir, dos números p y q tal que $p + q = b$ y $p \times q = c$. Los valores de p y q serán los términos independientes de los binomios: $(x + p)(x + q)$.

Por ejemplo, para factorizar el trinomio $y^2 - 15y + 50$ se buscan dos números cuya suma sea -15 y su producto, 50. En este caso, (-5) y (-10) cumplen las condiciones y, por tanto, $y^2 - 15y + 50 = (y - 10)(y - 5)$.

2 En grupo, comparen y comenten sus resultados. Establezcan, con ayuda de su profesor, un procedimiento para factorizar, como una multiplicación de binomios, un trinomio con coeficiente distinto de 1 en la variable cuadrática.

Busca en...

www.edutics.mx/4uk donde podrás resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización o usando la fórmula general y verificar si tus respuestas son correctas. (Consulta: 20 de enero de 2019).

3 En parejas, analicen las siguientes situaciones y respondan.

a) Un número más 3 multiplicado por sí mismo es igual a 4. ¿De qué número se trata?

- ¿Qué ecuación representa el problema? ______
- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación y cuál es la respuesta del problema? ¿Por qué? ______

b) Verónica tiene tres años menos que su hermana y el producto de sus edades es igual a 10.

- Representen el problema con una ecuación. ______
- Determinen las soluciones de la ecuación e indiquen la respuesta del problema. Expliquen su respuesta. ______

4 En grupo, comparen sus respuestas y procedimientos. Si alguna pareja utilizó la factorización, expongan los pasos que siguieron.

5 En parejas, respondan lo siguiente.

a) En la página 71 analizaron las condiciones que deben cumplir dos factores para que su producto sea igual a cero, así como que un trinomio puede descomponerse en dos binomios. ¿Qué condición deben cumplir dos binomios para que su producto sea cero? ______

b) De acuerdo con lo anterior, ¿cuáles son los posibles valores de z en la ecuación $(z - 8) \times (z + 5) = 0$? ¿Por qué? ______

c) Generalicen su resultado anterior. ¿Qué valores puede adquirir la variable c para que se cumpla la ecuación $(c + d) \times (c + e) = 0$? ______

d) Factoricen el trinomio $m^2 - 6m + 9 = 0$ y, a partir de los binomios obtenidos, calculen el valor de m. ¿Cuántas soluciones tiene el trinomio? ______

6 En grupo, comparen sus conclusiones y respuestas con las de otra pareja. Discutan la utilidad de la propiedad anterior al resolver ecuaciones mediante una factorización, con la que se obtiene una multiplicación de dos binomios. Anoten sus conclusiones en su cuaderno.

7 En parejas, factoricen los siguientes trinomios y obtengan la o las soluciones de las ecuaciones.

a) $0 = x^2 + 2x - 8 =$ ______ Solución o soluciones: ______

b) $0 = n^2 - 5n + 6 =$ ______ Solución o soluciones: ______

8 Representen cada una de las siguientes situaciones con una ecuación y resuélvanla en su cuaderno. Justifiquen sus respuestas.

a) El producto de las edades de dos hermanas es 644. Si una de ellas es cinco años menor que la otra, ¿cuántos años tiene cada una?

b) Si el rectángulo de la figura 2.1.4 (página 73) se formó al aumentar 3 cm y 2 cm al cuadrado, y su área es de 30 cm², ¿cuánto mide cada lado del cuadrado?

c) Angelina hace tarjetas de presentación rectangulares, cuyo largo es el doble del ancho. Al aumentar 3 cm el ancho y 4 cm el largo, el área que se obtiene es el doble que el área del rectángulo original. ¿Cuáles son las dimensiones de las tarjetas de presentación?

d) Ana Elena y Ramón hacen mantas para promocionar la venta de sus productos. Hoy elaboraron dos mantas cuadradas con un área total de 52 m². El contorno de cada manta se sujeta a un bastidor de madera. Si el bastidor de una es 8 m mayor que el otro, ¿cuáles son las medidas de cada manta?

9 En grupo, compartan y comenten sus procedimientos y respuestas. Verifiquen, con apoyo de su maestro, que sean correctos y corrijan los errores que se presenten.

Reflexiona

1. Resuelve en tu cuaderno el siguiente problema.
   a) El largo de un rectángulo es una unidad más grande que su ancho, y numéricamente su área es igual a 2 veces su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? Justifica tu respuesta.

Regresa y revisa

1 Lee nuevamente el problema de la situación inicial y responde.

a) ¿Cómo puedes utilizar la factorización para obtener las medidas del terreno? ______

b) Si el terreno de Luis tuviera una superficie de 4 000 m² y se necesitaran 280 m para cercarlo, ¿cuáles serían sus dimensiones? ______

Resuelve y practica

1. Utiliza la factorización para resolver en tu cuaderno las siguientes ecuaciones.
   a) $x^2 - 4x + 5 = 10$ b) $x^2 - 4x + 46 = 42$
   c) $x^2 + x - 64 = -22$ d) $x^2 - 100 = -19$
   e) $x^2 + 8 = 4$
2. En grupo, verifiquen sus respuestas y corríjanlas si es necesario.

2. Figuras que giran y cambian de lugar

Situación inicial

Engranes incompletos

Fig. 2.2.1.

Los diseñadores de una fábrica de piezas metálicas para maquinaria elaboraron el modelo de dos engranes por computadora; sin embargo, la impresión salió mal por defectos de la impresora, como se muestra en la figura 2.2.1. Completa el dibujo. Explica tu procedimiento.

Analiza

1. En parejas, comparen sus resultados y procedimientos, y respondan en su cuaderno.
   - **a)** ¿Cómo podrían saber si su respuesta es correcta?
   - **b)** ¿Qué dificultades enfrentaron? ¿Cómo las resolvieron?
   - **c)** ¿Qué similitudes y diferencias identifican entre los dos engranes?

Explora y construye

De un lugar a otro

1 En parejas, analicen las figuras 2.2.2 y 2.2.3, y realicen lo que se pide. Contesten en sus cuadernos.

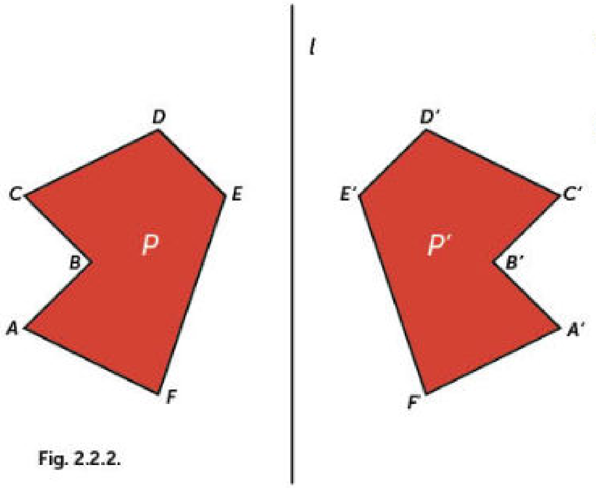


Fig. 2.2.2.

- a) ¿Cómo se obtiene el polígono P' a partir del polígono P? Justifiquen su respuesta.
- b) ¿Cómo son entre sí los polígonos P y P' de acuerdo con las medidas de sus ángulos y sus lados?

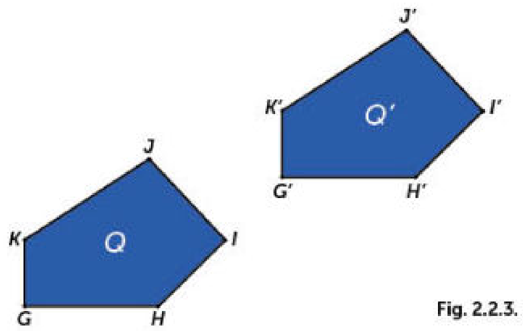


Fig. 2.2.3.

- c) Discutan cómo se puede obtener el pentágono Q' a partir de Q y escriban sus conclusiones.
- d) ¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos y los lados de los dos pentágonos?
- e) Consideren un segmento de recta que coincida con uno de los lados del pentágono Q, por ejemplo, el segmento $\overline{KJ}$ y prolónguenlo. Prolonguen también el lado correspondiente de la figura Q'. ¿Qué observan?, ¿cómo son entre sí ambas rectas? y, por tanto, ¿cómo son entre sí esos lados correspondientes de las figuras?
- f) Generalicen su respuesta anterior: ¿cómo son entre sí los lados correspondientes de los polígonos Q y Q'? Para comprobar su respuesta tracen otras rectas sobre los segmentos que forman los lados correspondientes de ambas figuras. Respondan: ¿se modifica la posición de la figura Q' respecto de la figura Q?
- g) En grupo, comparen y comenten sus respuestas anteriores y determinen las características de las figuras obtenidas respecto a las originales.

Una *traslación* consiste en desplazar una figura de su posición original, sin modificar su orientación, de modo que la figura desplazada es congruente con la figura original. Por ejemplo, en la actividad anterior, al trasladar al polígono Q se obtiene el polígono Q'.

2 En parejas, realicen y respondan lo siguiente.

- a) De acuerdo con la definición de traslación de una figura expliquen, con sus propias palabras, el significado de trasladar un punto. ____________
- b) Trasladen el polígono K de la figura 2.2.4, de manera que el punto B se traslade al punto B'. Nombren K' al polígono resultante.

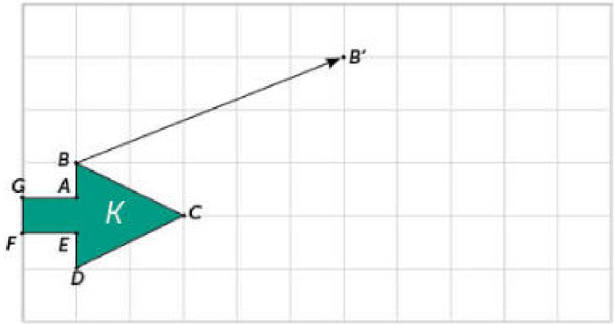


Fig. 2.2.4.

c) Escriban el procedimiento que utilizaron para la traslación. ______

d) Comparen y comenten con otra pareja sus respuestas a los dos incisos anteriores y expliquen por qué es válido su procedimiento para trasladar el polígono. ______

e) Tracen los vectores que van desde los vértices de K hacia los vértices correspondientes de K'. Compárenlos con el vector $\overrightarrow{BB'}$. ¿Qué características comparten? ______

f) Discutan qué entienden por magnitud de una traslación. ______

3 En grupo, analicen las características que comparten los vectores que van de los puntos de una figura hacia los puntos correspondientes de su traslación. Escriban sus conclusiones en sus cuadernos.

La *directriz* de una traslación es el *vector* que determina el sentido y la magnitud (la distancia) hacia la que se trasladará una figura. Para denotar un *vector* se suele utilizar una flecha sobre las literales que lo identifican. Por ejemplo: $\vec{r}$ se lee: "vector erre"; y $\overrightarrow{BB'}$ es el vector que va del punto B al punto B'. Así, en la figura 2.2.4 el vector $\overrightarrow{BB'}$ es la directriz de traslación del polígono K.

4 Traslada el polígono L de la figura 2.2.5, considerando el vector $\overrightarrow{AA'}$ como directriz, y responde.

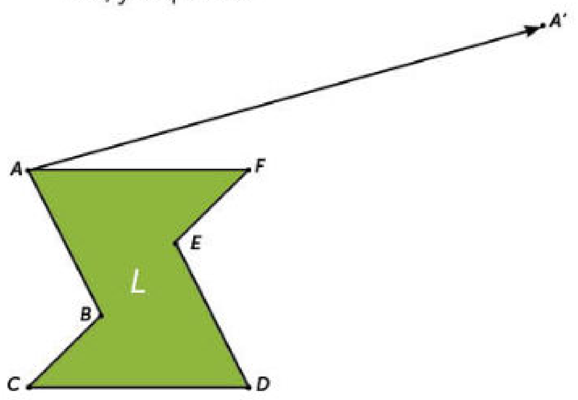


Fig. 2.2.5.

a) ¿El procedimiento que utilizaste fue distinto del que empleaste para trasladar el polígono K? De ser así, descríbelo. ______

5 En grupo, comenten sus procedimientos para realizar las traslaciones y determinen su validez con ayuda del profesor.

Un pequeño giro

1 En parejas, observen la figura 2.2.6. Realicen lo que se pide y contesten en sus cuadernos.

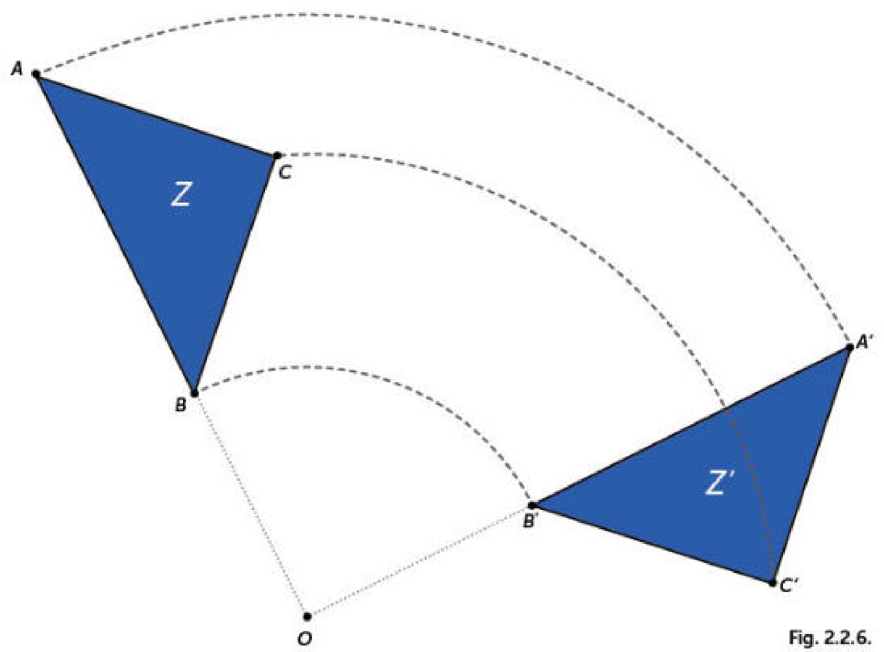


Fig. 2.2.6.

a) ¿Cómo se obtuvo el polígono Z' a partir del polígono Z?
b) Comenten cuál es la función del punto O de la figura.
c) Escriban las similitudes y diferencias que observen entre los triángulos Z y Z'.
d) Tracen los segmentos que unen los vértices de Z y los de Z' con O. Analicen los ángulos que forman los vértices correspondientes de ambas figuras con el punto O; compárenlos con el ángulo $\angle BOB'$ y escriban sus observaciones.

2 En grupo, compartan y comenten sus respuestas. Determinen un procedimiento para obtener el triángulo Z' a partir del triángulo Z.

Una *rotación* consiste en girar una figura respecto a un punto, llamado *centro de rotación*, para obtener una figura congruente con la original. El centro de rotación se puede localizar en el interior o en el exterior de la figura original, y ángulo de giro, medido en grados, puede ser en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario.

Por ejemplo, en la actividad anterior, al rotar 90° el triángulo Z en el sentido de las manecillas de reloj respecto al punto O, se obtuvo el triángulo Z'.

3 En grupo, discutan con ayuda del profesor cuál sería el resultado de girar 270° el triángulo Z de la figura 2.2.6, respecto al punto O, en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

4 En parejas, realicen los siguientes trazos en la figura 2.2.7 y contesten.

- El triángulo simétrico a *HIJ* respecto a la recta roja y nómbrenlo, respectivamente, *H'I'J'*.
- El triángulo simétrico a *H'I'J'* respecto a la recta azul y nómbrenlo, correspondientemente, *H"I"J"*.

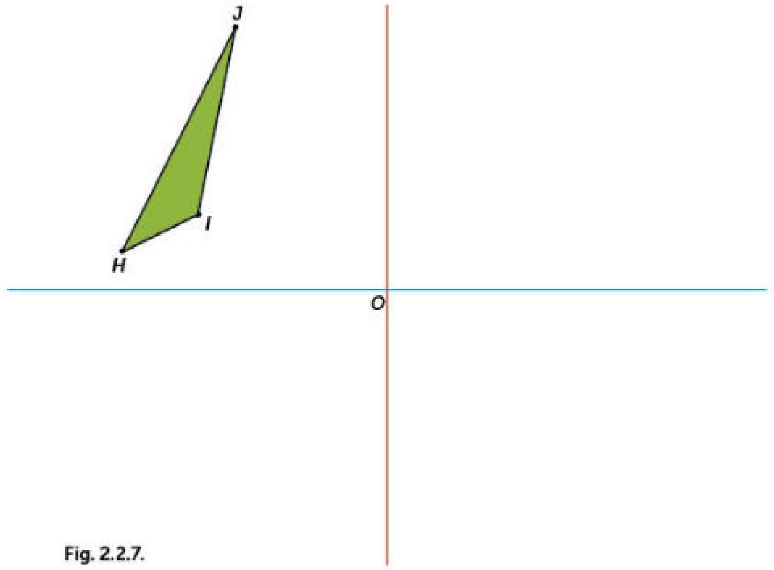


Fig. 2.2.7.

Busca en...

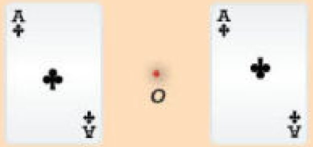
www.edutics.mx/ 4uU donde podrás saber más de rotaciones y traslaciones. (Consulta: 20 de enero de 2019).

a) Tracen los segmentos de recta que unen, respectivamente, los vértices *H*, *I*, *J* con los vértices *H"*, *I"*, *J"*. ¿Qué observan? Escriban sus conclusiones. ______

b) ¿Se puede obtener el triángulo *H"I"J"* al rotar el triángulo *HIJ*? Si su respuesta es afirmativa, determinen el ángulo, sentido y centro de la rotación; de lo contrario, justifiquen su respuesta. ______

5 En grupo, analicen y comenten sus respuestas anteriores. Verifiquen que sean correctas y, si es necesario, corrijan sus errores.

Cuando el simétrico de una figura es una rotación de 180° respecto al centro de rotación se habla de *simetría central*. Por ejemplo, las siguientes imágenes presentan simetría central respecto al punto *O*.



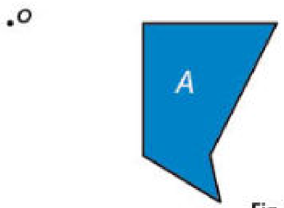


Fig. 2.2.8.

6 En equipos, realicen las actividades y contesten.

a) Roten 80°, con el punto *O* como centro de rotación y en sentido de las manecillas del reloj, el polígono de la figura 2.2.8.

b) Roten 60°, en el sentido de las manecillas del reloj, el polígono de la figura 2.2.9; consideren el punto *R* como centro de rotación.

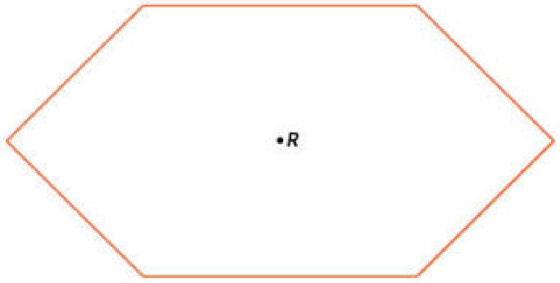


Fig. 2.2.9.

c) Anoten los procedimientos con los que obtuvieron las rotaciones anteriores y compárenlos con los de otros equipos. ¿Obtuvieron los mismos resultados? Validen los procedimientos con ayuda de su profesor. ______

d) El polígono *A'* de la figura 2.2.10 se obtuvo al rotar el polígono *A*.

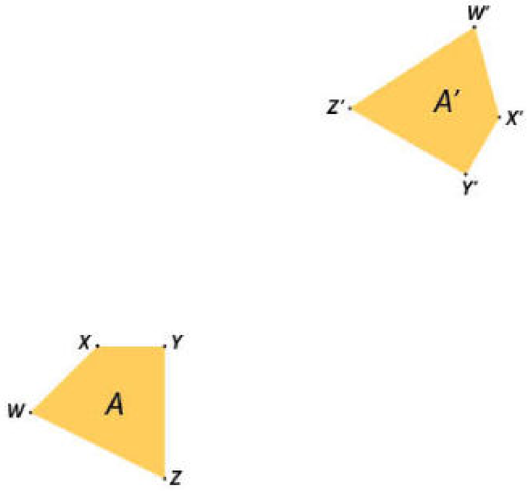


Fig. 2.2.10.

- Determinen la ubicación del centro de rotación y expliquen cómo lo obtuvieron. ______
- ¿Cuántos grados y en qué sentido se rotó el polígono *A* para obtener el polígono *A'*? ______

7 En grupo, compartan sus procedimientos de la actividad anterior y verifiquen que sean correctos. Corrijan los errores que se presenten.

Reflexiona

1. En equipos, tracen en sus cuadernos los siguientes polígonos y localicen el centro de cada uno. Determinen cuántos grados se debe rotar cada uno, considerando el centro del polígono como centro de rotación, para que regrese a su posición original.
   a) Triángulo equilátero **b)** Cuadrado **c)** Rombo
   d) Romboide **e)** Pentágono regular **f)** Hexágono regular
2. En grupo, verifiquen sus respuestas y si se presentan errores, corríjanlos.

Regresa y revisa

Toma nota

Localiza los términos "traslación" y "rotación" en el glosario (págs. 256-258) y anota con tus propias palabras una explicación y un ejemplo de cada uno.

1 En parejas, analicen el siguiente problema y contesten.

Para hacer el logotipo que se muestra en la figura 2.2.11, un diseñador trazó la figura *C*, la trasladó y rotó la traslación.

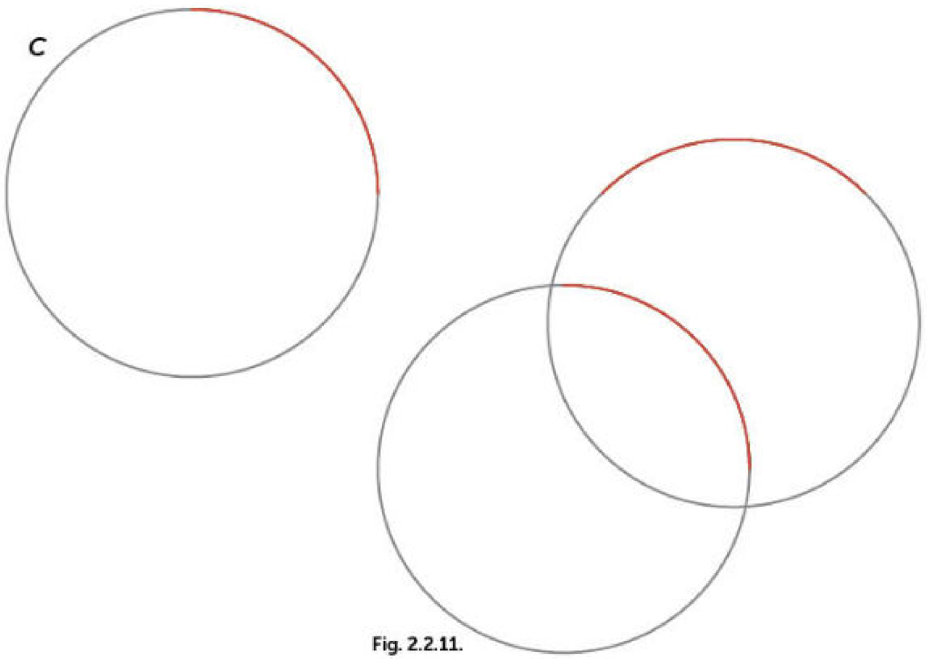


Fig. 2.2.11.

a) Determinen la directriz de traslación.

b) Localicen el centro de rotación y determinen los grados que rotó la figura, así como el sentido en el que lo hizo. ______

2 En grupo, compartan y verifiquen sus respuestas anteriores. Corrijan los errores que se presenten.

3. Diseños con las mismas figuras

Situación inicial

Lanzamiento de un búmeran

La figura 2.3.1 muestra algunas posiciones de un búmeran durante su lanzamiento. Dibuja una posible posición 5 a partir de la posición 4 y explica cómo construiste tu propuesta.

Fig. 2.3.1.

Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4 Posición 5

Analiza

1. En parejas, contesten lo siguiente.
   a) ¿Qué transformaciones de figuras han estudiado en sus cursos de Matemáticas? ¿En qué consisten? ______
   b) ¿Con qué transformaciones se logra la posición 2 a partir de la posición 1? ______
   c) ¿Cómo se obtiene la posición 3 a partir de la posición 2? ______
   d) ¿Cómo es posible lograr la posición 4 a partir de la posición 3 con una sola transformación? ______
   e) ¿Cómo se obtiene la posición 4 a partir de la posición 1 con el mínimo número de transformaciones? ______
2. En grupo, compartan y comparen sus respuestas, así como el procedimiento para trazar la posición 5, y verifiquen que sean correctos.

Figuras en movimiento

1 En parejas, analicen los siguientes pares de figuras y determinen mediante qué transformaciones se obtuvo una a partir de la otra. Indiquen, según las transformaciones que determinaron, los ejes de simetría, la directriz y el centro de rotación. Luego contesten las preguntas.

a) Trasformación o transformaciones utilizadas: ______________________

____

____

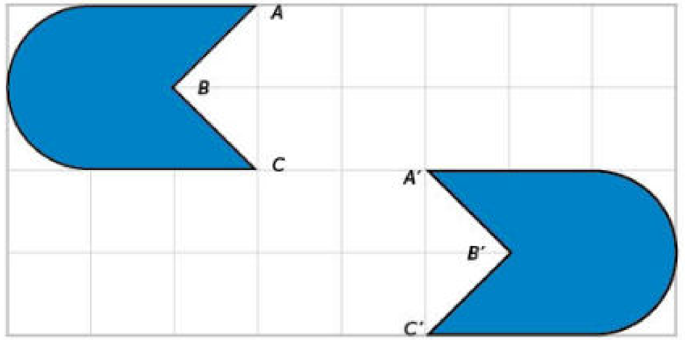


Fig. 2.3.2.

b) Trasformación o transformaciones utilizadas: ______________________

____

____

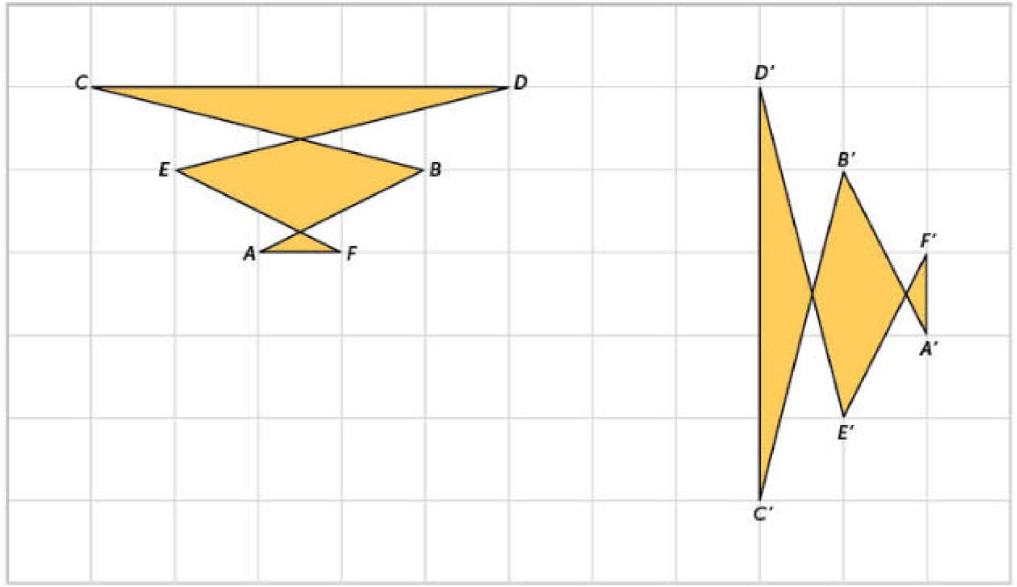


Fig. 2.3.3.

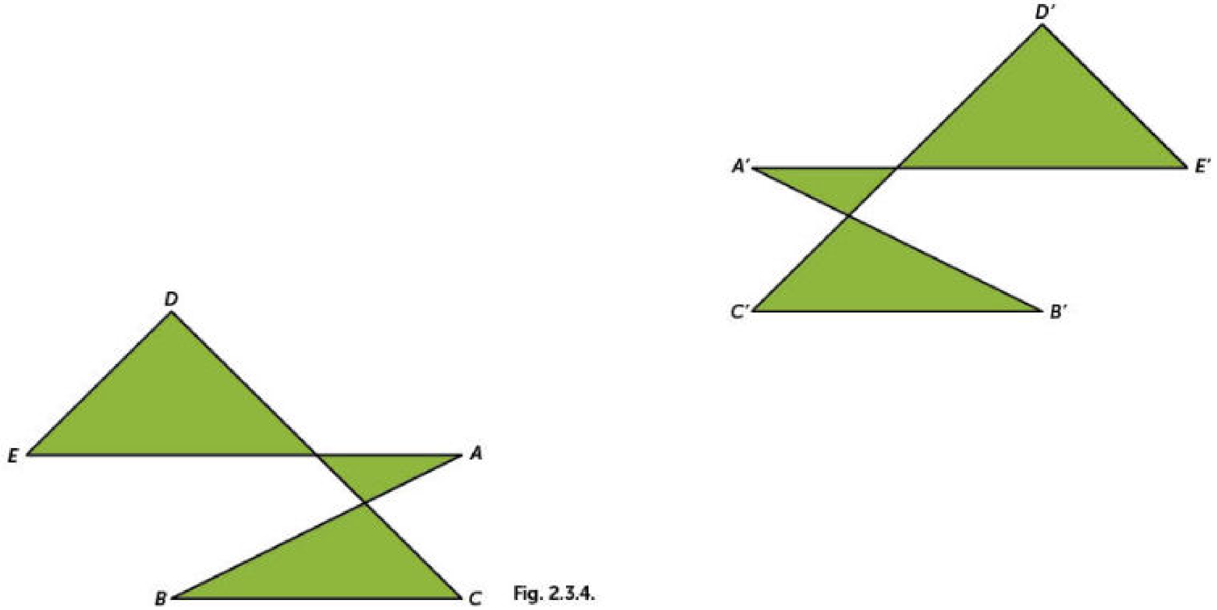


Fig. 2.3.4.

c) Trasformación o transformaciones utilizadas: ______________________

____

____

d) ¿Qué figura consideraron la original en cada inciso? ______________________

____

e) ¿Qué dimensiones se conservaron entre la figura original y la transformación?

____

____

f) De acuerdo con la respuesta anterior, ¿cómo son entre sí las figuras de cada inciso? ______________________

2 En grupo, comparen con otras parejas las transformaciones que determinaron. ¿Son las mismas?

a) ¿Qué pareja obtuvo menos transformaciones y cuál obtuvo más para cada inciso?

b) Concluyan cómo son entre sí las figuras original y final cuando ésta se obtiene mediante varias transformaciones sucesivas de la original.

3 Traza en tu cuaderno una figura y haz con lápiz una transformación de ella. Haz otra transformación pero a partir de la figura obtenida. Borra la primera e intercambia tu construcción con un compañero. Determina qué transformaciones hizo tu compañero. Analicen si las transformaciones que propusieron son correctas para obtener la figura final a partir de la inicial.

4 En equipos, analicen las figuras y describan el procedimiento más directo para construirlas utilizando las transformaciones que conocen.

Fig. 2.3.5.

Fig. 2.3.6.

Procedimiento:

Procedimiento:

Busca en...

www.edutics.mx/4uw donde podrás aprender acerca de transformaciones geométricas. (Consulta: 20 de enero de 2019).

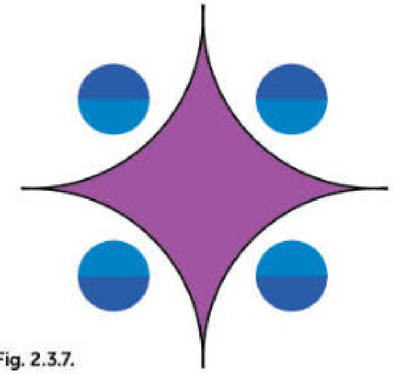


Fig. 2.3.7.

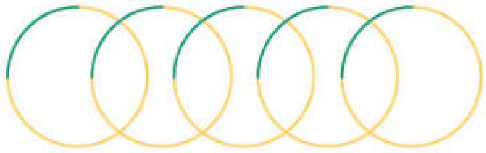


Fig. 2.3.8.

Procedimiento:

Procedimiento:

5 Intercambien sus procedimientos con los de otro equipo e intenten reproducir las figuras siguiéndolos. Verifiquen así que sean correctos.

6 Diseña un logotipo o un símbolo mediante transformaciones e intercámbialo con el de un compañero. Identifica las transformaciones que utilizó tu compañero.

7 En parejas, analicen la figura 2.3.9 que muestra el decorado interior del palacio de La Alhambra, en Granada, España y contesten.

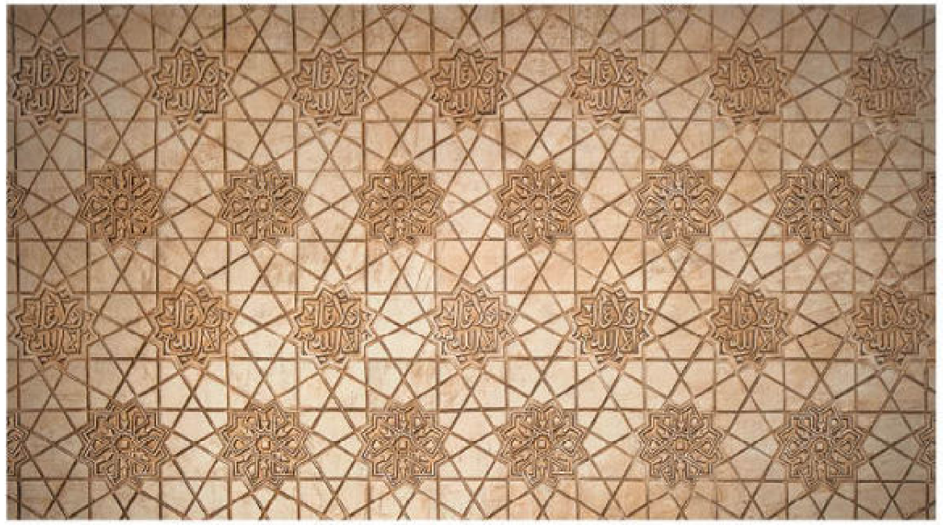


Fig. 2.3.9.

a) ¿Qué transformaciones de figuras identifican?

b) Delimiten un fragmento de la figura 2.3.9 de modo que al hacer transformaciones de él se obtenga la imagen completa. Marquen la figura base y expliquen cómo se realizan las trasformaciones para obtener toda la imagen.

8 En grupo, compartan y comparen sus respuestas con las de otras parejas. Expongan en el pizarrón una transformación de cada tipo (simetría axial, traslación y rotación) que se identifique en la figura 2.3.9.

Teselaciones con transformaciones

1 En equipos, reproduzcan las siguientes figuras y mediante transformaciones teselen el plano con cada una. Mencionen en su cuaderno qué transformaciones utilizaron.

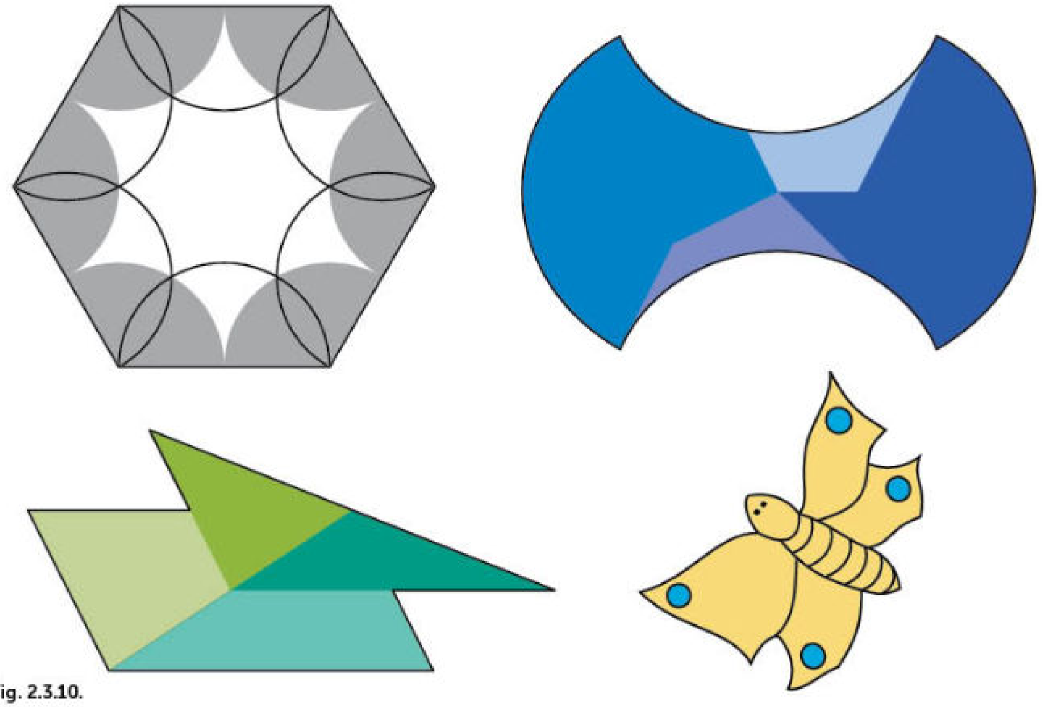


Fig. 2.3.10.

2 En grupo, compartan sus diseños y verifiquen que las transformaciones que usaron sean correctas.

Reflexiona

1. En parejas, realicen y respondan lo siguiente en su cuaderno.
- ▶ Tracen una figura cualquiera y nómbrenla *F*. Elijan un punto cualquiera en el plano y desígnenlo *O*.
- ▶ Tracen una figura simétrica a *F* respecto a *O* y nómbrenla *F'*.
- ▶ Elijan otro punto en el plano distinto de *O* y llámenlo *P*.
- ▶ Tracen la figura simétrica a *F'* respecto *P* y desígnenla *F''*.

a) ¿Cómo se puede obtener *F''* a partir de *F* con una sola transformación? Argumenten su respuesta.

Regresa y revisa

1 En equipos, construyan una figura con la que puedan teselar el plano mediante transformaciones, de modo que utilicen simetrías axiales, traslaciones o rotaciones.

4. Cuadrados sobre los lados de un triángulo

Situación inicial

Pintura para un mural

Roberto asiste a un taller de pintura en la casa de la cultura de su colonia. Actualmente está elaborando un mural abstracto con una temática geométrica, como muestra la figura 2.4.1. Para pintar los triángulos amarillos ocupó la mitad de la pintura de ese color. ¿Le quedará suficiente pintura amarilla para pintar también el cuadrado blanco? Justifica tu respuesta.

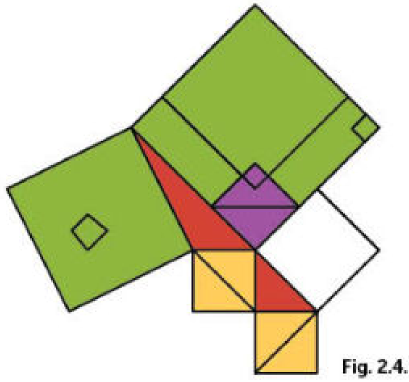


Fig. 2.4.1.

Analiza

1. En parejas, contesten las preguntas en sus cuadernos.
   - a) ¿Qué figuras del mural son congruentes entre sí?
   - b) ¿Cómo podrían determinar la cantidad de pintura necesaria para pintar el cuadro blanco? Justifiquen su respuesta.
   - c) ¿Qué nombre reciben los triángulos rojos según la medida de sus ángulos?

Explora y construye

El mismo espacio

1 En equipos, construyan en su cuaderno una figura semejante a la figura 2.4.2. Recorten las piezas del tangram. Después realicen y contesten lo siguiente.

a) Cubran por completo los dos cuadrados blancos con las piezas del tangram. Las piezas no deben sobreponerse ni quedar huecos en los cuadrados.

b) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo blanco de acuerdo con la medida de sus ángulos y lados? ______

______

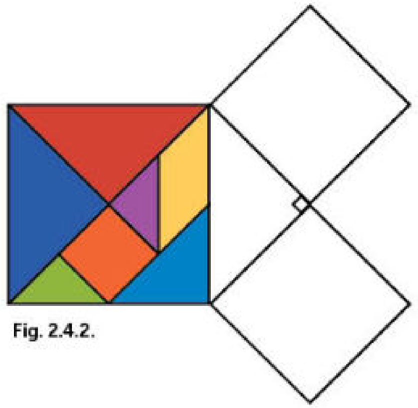


Fig. 2.4.2.

c) En grupo, compartan sus resultados con los demás equipos. Expongan la manera en que cubrieron los cuadrados blancos y en su cuaderno expliquen cuál es la relación entre las áreas de los cuadrados trazados sobre los lados del triángulo blanco.

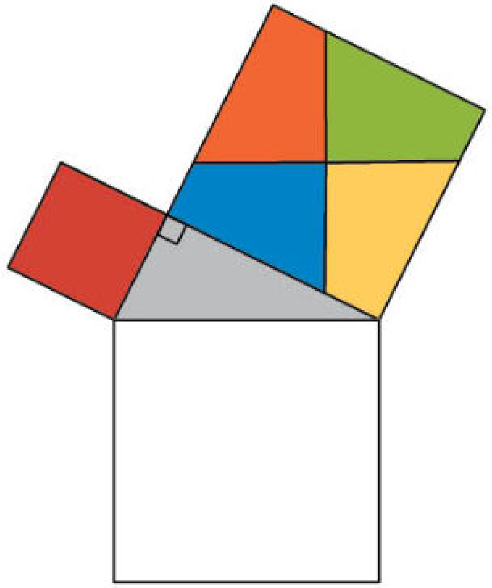


Fig. 2.4.3.

2 En equipos, reproduzcan una figura semejante a la figura 2.4.3 y recorten los cuadriláteros de colores. Luego realicen y respondan lo siguiente.

a) Determinen si es posible acomodar sin sobreponer, dentro del cuadrado blanco, los cuadriláteros que recortaron.

b) ¿De qué tipo es el triángulo gris según la medida de sus ángulos? ______

c) Determinen cómo es el área del cuadrado trazado en el lado mayor del triángulo en relación con el área de los cuadrados trazados en los lados menores. ______

______

______

3 En parejas, analicen el siguiente problema y respondan.

En un salón de eventos sociales hay tres salas cuadradas de distintos tamaños, que se conectan en una sección triangular como muestra la figura 2.4.4.

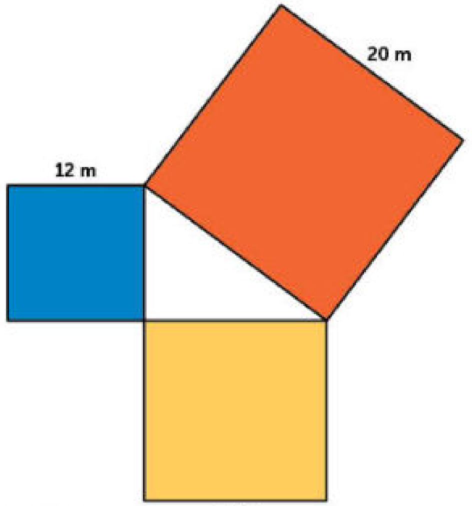


Fig. 2.4.4.

a) Si para cada asistente se requiere un área de 2 m^2, ¿en qué sala caben más: en la sala grande o en las dos salas pequeñas juntas? Justifiquen su respuesta. ______

______

______

b) ¿De qué tipo, según sus ángulos, es el triángulo que conecta las tres salas? ______

c) Si el lado de cada sala midiera el doble, ¿cuál sería la relación entre sus áreas?, ¿qué tipo de triángulo las conectaría? ______

______

4 En grupo, comparen y discutan sus resultados de las dos actividades anteriores. Realicen lo siguiente.

a) Dibujen en el pizarrón un triángulo de 3 dm, 4 dm y 5 dm, y analicen de qué tipo se trata, de acuerdo con sus ángulos. Tracen un cuadrado sobre cada lado, de manera que cada lado del triángulo sea un lado del cuadrado correspondiente. Expliquen cuál es la relación entre las áreas de los cuadrados que trazaron.

5 En parejas, examinen la figura 2.4.5 y respondan.

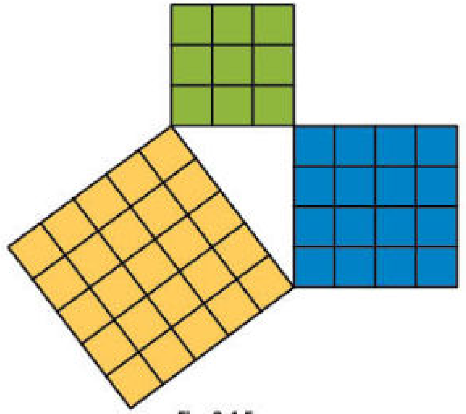


Fig. 2.4.5.

a) ¿Cuántos cuadros quedan en el cuadrado amarillo si se quitan tantos como los del cuadrado verde? ______

b) ¿Cuántos cuadros quedan en el cuadrado amarillo si se eliminan tantos como los del cuadrado azul? ______

c) ¿Qué tipo de triángulo se forma, de acuerdo con sus ángulos, entre los tres cuadrados? ______

______

d) A partir de lo anterior, ¿qué pueden concluir respecto a la relación entre las áreas de los cuadrados?

______

______

______

6 En equipos, construyan en su cuaderno una figura semejante a la figura 2.4.6. Recorten los polígonos de colores y realicen y contesten lo que se pide.

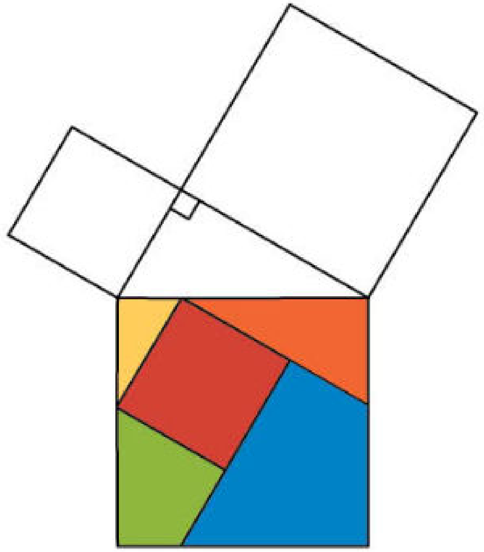


Fig. 2.4.6.

a) ¿Cuál sería el área resultante, en términos de las áreas de los tres cuadrados, si en el cuadrado más grande se elimina el cuadrado rojo? ______

______

b) ¿A cuál de las áreas de los cuadrados formados en los lados del triángulo equivale el área del cuadrado rojo?

______

c) Con las piezas sobrantes del cuadrado mayor intenten cubrir el área del cuadrado mediano (sin sobreponer las piezas). ¿Qué observan? ______

______

d) Expresen, con dos enunciados distintos, los resultados anteriores en términos de las áreas de los cuadrados formados sobre los lados del triángulo. ______

______

______

______

______

7 En grupo, compartan y comenten los resultados de las actividades anteriores. Con ayuda de su profesor discutan y respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué característica geométrica relacionada con sus ángulos comparten los triángulos anteriores? ______

b) Considerando los cuadrados que se forman sobre los lados de los triángulos anteriores, ¿qué relación general hay entre sus áreas? ______

c) ¿La relación anterior depende sólo de las longitudes de los lados de los triángulos? Justifiquen su respuesta. ______

Busca en...
www.edutics.mx/4ui donde podrás construir triángulos y observar la relación que guardan las áreas de los cuadrados construidos sobre sus lados. (Consulta: 20 de enero de 2019).

Exprésalo algebraicamente

1 En equipos, analicen los cuadrados de la figura 2.4.7. Realicen y contesten lo que se pide.

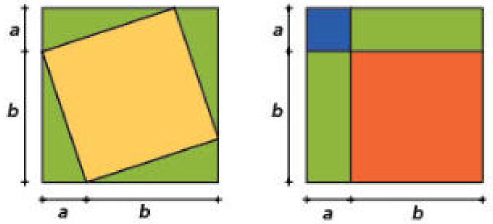


Fig. 2.4.7.

a) Calculen las áreas de las figuras que componen los dos cuadrados en términos de las literales. ¿Qué relación observan entre el área del cuadrado amarillo y las áreas de los cuadrados naranja y azul? Justifiquen algebraicamente su respuesta. ______

b) La figura 2.4.8 se formó con elementos de los cuadrados anteriores. ¿Qué tipo de triángulo, en términos de sus ángulos, aparece en esa formación y cuáles son sus medidas? ______

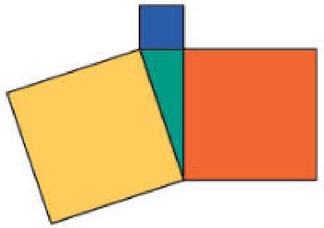


Fig. 2.4.8.

c) Concluyan cómo se relacionan las áreas de los cuadrados que se forman sobre los lados del triángulo. ______

2 En grupo, comparen y discutan sus resultados con los de otros equipos. Comenten sus conclusiones.

Triángulos no rectángulos

1 En parejas, analicen las composiciones de la figura 2.4.9 y respondan.

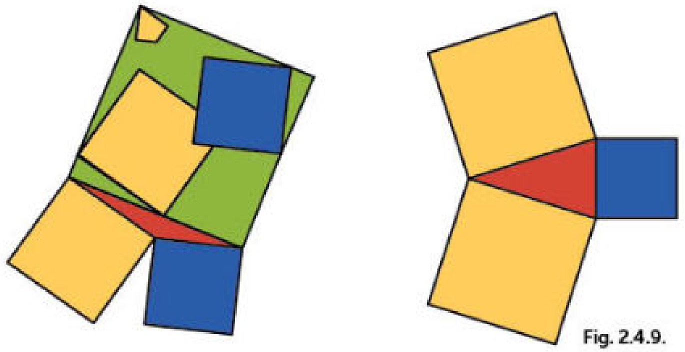


Fig. 2.4.9.

a) ¿Es posible, en la figura de la izquierda, cubrir por completo el cuadrado formado sobre el lado mayor del triángulo con los cuadrados trazados sobre los lados más pequeños? ¿Por qué? ______

b) ¿Es posible, en la figura de la derecha cubrir, sin exceder sus dimensiones, alguno de los cuadrados utilizando los otros dos sin sobreponerlos? Justifiquen su respuesta. ______

c) ¿De qué tipo son los triángulos anteriores considerando la medida de sus ángulos? ______

2 Realicen los siguientes trazos y contesten.

- Construyan un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 6 cm.
- Tracen los cuadrados que se forman sobre los lados del triángulo.

a) Determinen si las áreas de los cuadrados que trazaron tienen alguna relación.

b) Identifiquen la diferencia geométrica entre los triángulos de la sección anterior y los de esta sección.

3 En grupo, con ayuda de su profesor, analicen la diferencia entre los triángulos de la sección anterior, en los que relacionaron las áreas de los cuadrados formados en sus lados, con los triángulos de esta sección. Anoten sus conclusiones.

Regresa y revisa

1 En parejas, resuelvan el siguiente problema.

La figura 2.4.10 muestra otro mural que Roberto quiere pintar, donde el cuadrado anaranjado es congruente con el cuadrado verde.

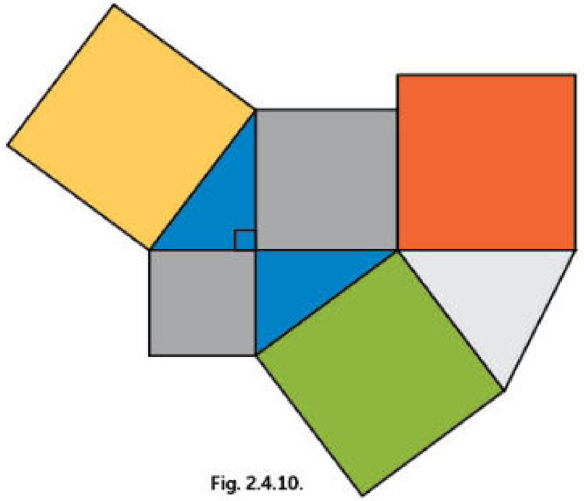


Fig. 2.4.10.

a) ¿Qué color de pintura utilizará más, naranja o amarilla? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Necesitará más pintura amarilla o gris oscuro? ¿Por qué?

2 En grupo, comparen sus respuestas y verifiquen si su argumentación es correcta.

5. El teorema de Pitágoras

Situación inicial

Geometría en el beisbol

En un partido de beisbol, el jugador defensor de segunda base tiene la pelota y ve que el corredor del equipo contrario, que se encontraba en tercera base, corre para anotar una carrera, por lo que lanza la pelota a *home*. Si la distancia entre cada base es de 27.4 m, ¿qué distancia en línea recta debe cubrir la pelota para llegar al cácher, que está en *home*?

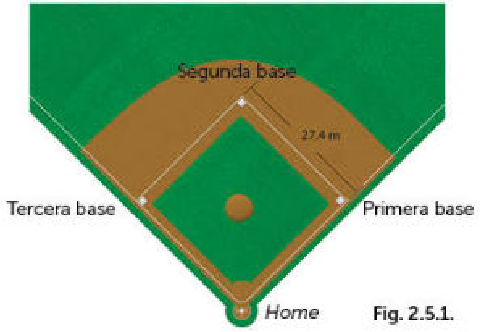


Fig. 2.5.1.

Analiza

1. En parejas, discutan una solución a la situación anterior y respondan.

a) ¿Anoten el procedimiento que siguieron?

b) Compárenlo con el de otras dos parejas, ¿qué similitudes y diferencias encuentran? Anótenlas.

c) ¿Cómo podrían determinar si sus respuestas y procedimientos son correctos?

d) Comparen sus respuestas y conclusiones con el resto del grupo. Valídenlos con ayuda de su profesor.

Explora y construye

Expresión del teorema de Pitágoras

1 En equipos, analicen la figura 2.5.2 y respondan.

a) En términos de las medidas de los lados del triángulo rectángulo, expresen algebraicamente las áreas del cuadrado construido en cada lado del triángulo.

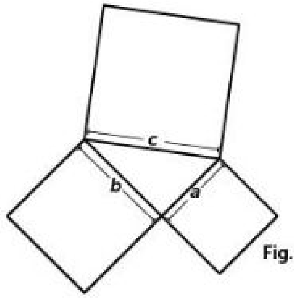


Fig. 2.5.2.

b) En la secuencia anterior establecieron la relación entre las áreas de los cuadrados que se forman en cada lado de un triángulo rectángulo. A continuación represéntenla en términos de las expresiones algebraicas que anotaron en la pregunta anterior. ______________________________

c) En grupo, con ayuda del profesor, comparen sus respuestas y establezcan una expresión algebraica para la relación entre las áreas de los cuadrados que se forman en los lados de cualquier triángulo rectángulo.

En todo triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto se denomina *hipotenusa*.
La relación entre las áreas de los cuadrados formados en los lados de un triángulo rectángulo se expresa en el *teorema de Pitágoras* de la siguiente forma: "la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

Busca en...

www.edutics.mx/oud donde podrás verificar el teorema de Pitágoras. (Consulta: 20 de enero de 2019).

d) ¿Cuál es la relación entre la expresión que establecieron en el inciso anterior y el teorema de Pitágoras? ______________________________

2 En equipos, analicen las siguientes preguntas y respondan.

a) ¿Cómo se puede obtener la medida de los lados de un cuadrado si se conoce la medida de su área? ______________________________

b) ¿Cómo podrían obtener la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo a partir de la medida de sus catetos mediante la expresión algebraica del teorema de Pitágoras? ______________________________

Toma nota

Localiza "teorema de Pitágoras" en el glosario (págs. 256-258); explícalo con tus propias palabras y escribe un ejemplo.

c) Expresen su respuesta anterior como una ecuación algebraica. ______________

d) Escriban una expresión algebraica para obtener el cuadrado de uno de los catetos de un triángulo rectángulo a partir del otro cateto y de la hipotenusa. Usen el teorema de Pitágoras. ______________________________

e) Anoten una ecuación para obtener la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo a partir del otro cateto y de la hipotenusa. ______________

3 En equipos, observen la figura 2.5.3 y escriban el significado de las siguientes expresiones.

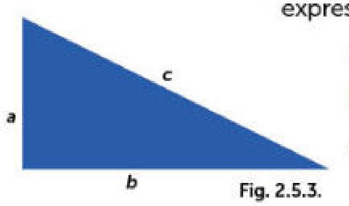


Fig. 2.5.3.

a) a ______________ d) $a^2 + b^2$ ______________

b) b^2 ______________ e) $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ ______________

c) c^2 ______________ f) $\sqrt{(c^2 - b^2)}$ ______________

4 Compartan sus respuestas en grupo y, con ayuda de su profesor, escriban ecuaciones para obtener las medidas de la hipotenusa de un triángulo rectángulo y la medida de uno de los catetos; en ambos casos apliquen el teorema de Pitágoras.

____

____

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

1 En equipos, resuelvan los siguientes problemas.

a) Un electricista del municipio debe cambiar el foco de una luminaria. Para subir a la lámpara, que está a 7 m de altura, utiliza una escalera cuya base coloca a una distancia de 1.80 m de la base de la luminaria.

- De acuerdo con la medida de sus ángulos, ¿qué tipo de triángulo se forma con la escalera, el piso y el muro donde se encuentra la luminaria? ______________
- ¿Qué representa en esa figura geométrica la longitud de la escalera? ______________
- ¿Cuál es la longitud de la escalera?

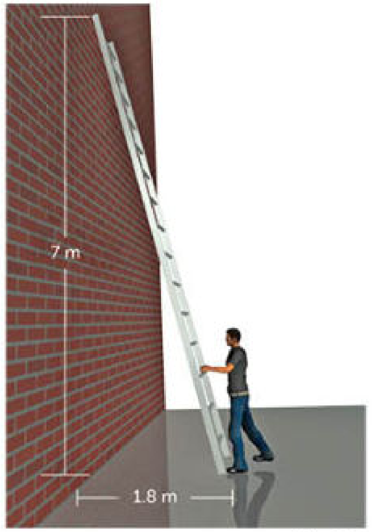


Fig. 2.5.4.

b) Para volar su papalote, Juanito sostiene la cuerda a la altura de su cabeza. Calculen la altura a la que se encuentra el papalote considerando las medidas mostradas en la figura 2.5.5.

- Para que el papalote alcance 15 m de altura con las mismas condiciones del problema, ¿qué longitud mínima de cuerda necesita Juanito?

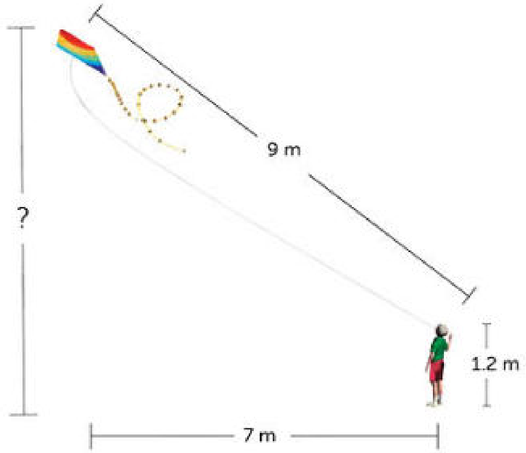


Fig. 2.5.5.

2 En grupo, comparen y validen sus resultados y procedimientos con ayuda de su profesor. ¿Utilizaron el teorema de Pitágoras para resolverlos? ¿De qué forma? ¿Algunos usaron otro método?, ¿cuál?

Reflexiona

1. En equipos, analicen la pregunta.
   a) ¿Para qué tipo de triángulos es aplicable la ecuación: $c^2 = 2a^2$, donde c representa a la hipotenusa y a es la medida de uno de los catetos? Subrayen y justifiquen en su cuaderno la respuesta correcta.
   - Para triángulos rectángulos escalenos.
   - Para triángulos rectángulos isósceles.
   - Para triángulos equiláteros.
   - Para triángulos obtusángulos.

Regresa y revisa

1 Retoma el problema de la situación inicial y responde.

a) ¿Qué figura geométrica se forma entre la segunda y la tercera bases y el *home*? ____________

b) ¿Qué representa en esa figura geométrica la distancia entre la segunda base y *home*? ____________

c) ¿Qué representa la distancia entre las bases contiguas? ____________

d) ¿Cuál es la distancia entre la segunda base y *home*? ____________

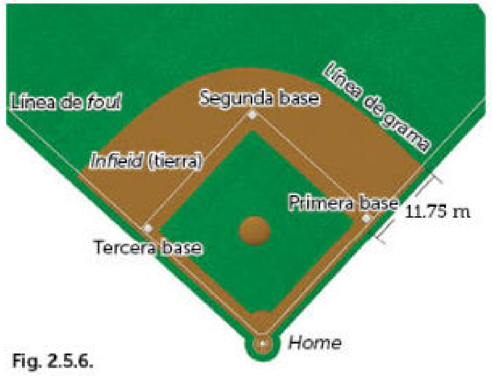


Fig. 2.5.6.

2 Responde lo siguiente en tu cuaderno.

a) La distancia entre la primera base y el punto donde se une la línea de grama y la línea de *foul* es de 11.75 m, aproximadamente. Si durante el juego el bateador le pega a la pelota, de modo que ésta cae en la zona de *infield* y rebota hasta el punto donde coinciden la línea de *foul* y la línea de grama y ahí la recoge el jardinero, ¿qué distancia deberá recorrer la pelota para hacer el doble *out* del jugador que corre a segunda base y el bateador que corre a primera?

Resuelve y practica

1. Calcula el área de los cuadrados sombreados.

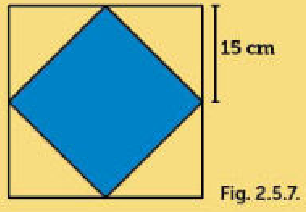


Fig. 2.5.7.

$A =$ ____________

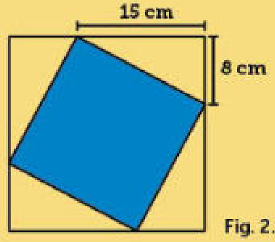


Fig. 2.5.8.

$A =$ ____________

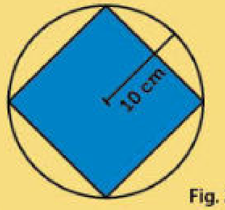


Fig. 2.5.9.

$A =$ ____________

6. Cálculo de la probabilidad

Situación inicial

Carrera de caballos

En una carrera compiten cinco caballos identificados con los números 78, 5, 99, 106 y 25. Los expertos afirman que, de acuerdo con sus resultados en carreras anteriores, el número 78 tiene 50% de probabilidades de ganar; el número 5, 17%; el número 99, 9%, y los caballos con números 106 y 25 tienen la misma probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el número 106 o el 25? ¿Por qué?

Analiza

1. En parejas contesten y realicen lo siguiente en su cuaderno.
   a) ¿Qué procedimiento siguieron para resolver el problema?
   b) ¿Cómo pueden verificar si el resultado es correcto?
   c) Consideren que en la carrera no hay empates. ¿Cómo son entre sí los eventos "gana el caballo número 78" y "gana el caballo número 5"? ¿Por qué?
   d) ¿Y cómo son entre sí los otros eventos de la carrera?
2. Compartan sus respuestas con otra pareja y comenten.
   a) ¿Sus procedimientos fueron similares o en qué difieren?
   b) ¿Sus respuestas y procedimientos les parecieron razonables? Escriban sus conclusiones.
3. En grupo verifiquen sus procedimientos y respuestas con apoyo de su profesor.

Explora y construye

Eventos simples y compuestos

1 En parejas, analicen los siguientes eventos y contesten lo que se pide.

I. Tirar un dado, numerado del 1 al 6, y que al caer la cara superior sea 4.
II. Tirar un dado, numerado del 1 al 6, y que al caer la cara superior sea un número mayor que 5.
III. Tirar un dado, numerado del 1 al 6, y que al caer la cara superior sea el número 5 o 6.
IV. Lanzar una moneda y que al caer la cara superior sea águila.
V. Lanzar una moneda y que al caer la cara superior sea águila o sol.
VI. Comprar un foco defectuoso.
VII. Comprar un foco que no esté defectuoso.

a) ¿Qué entienden por evento simple y evento compuesto? ____________

____

b) De acuerdo con su respuesta, de los eventos anteriores, ¿cuáles son simples y cuáles compuestos? ______

c) ¿Qué eventos son, además de compuestos, complementarios? ¿Por qué? ______

Los *eventos simples* son aquellos cuyo resultado es un solo elemento del espacio muestral.

Los *eventos compuestos* se forman con dos o más eventos simples.

Por ejemplo: Se lanza un dado cúbico, numerado del 1 al 6, y cuando cae se considera su cara superior:

Eventos simples: "Que caiga el número 3", "que caiga un número menor que 2", "que caiga un número mayor o igual a 6".

Eventos compuestos: "Que caiga el número 1 o que caiga el número 4", "que caiga un número mayor que 3", "que caiga un número mayor a 2 o que caiga un número igual a 2".

La probabilidad de eventos complementarios

1 En parejas, analicen las situaciones y contesten lo que se solicita.

a) El Servicio Meteorológico Nacional anunció que la probabilidad de que un huracán arribe al Golfo de México en las próximas 48 horas es de 0.26.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el huracán no se presente durante las próximas 48 horas? Expliquen el procedimiento que siguieron para obtener su respuesta. ______
- ¿Cómo son entre sí los eventos "que se presente un huracán durante las próximas 48 horas" y "que no se presente un huracán durante las próximas 48 horas"? Argumenten su respuesta. ______

b) Un vendedor ofrece enciclopedias de puerta en puerta. De acuerdo con sus ventas del mes pasado la probabilidad de que realice una venta cada vez que ofrece sus productos es de 0.59.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente no compre una enciclopedia? ¿Cómo obtuvieron la respuesta? ______
- ¿Cómo son entre sí los eventos "comprar una enciclopedia" y "no comprar una enciclopedia"? ¿Por qué? ______

2 Reúnanse con otra pareja y respondan.

a) ¿Cómo podrían calcular la probabilidad de que ocurra un evento a partir de la de su evento complementario? Justifiquen su respuesta. ______

3 En grupo, compartan sus conclusiones con una pareja y verifiquen que sean correctas. Comenten y corrijan los errores con apoyo de su profesor.

Si dos eventos, A y B, son complementarios, entonces la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos es igual a 1 menos la probabilidad de ocurrencia del otro.
Es decir, $P(B) = 1 - P(A)$ y también $P(A) = 1 - P(B)$.

Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

1 En parejas, calculen la probabilidad de los siguientes eventos y contesten lo que se solicita.

a) Hay seis tarjetas que de un lado son blancas y del otro de distinto color: verde, amarillo, azul, rojo, morado o café. Se colocan con la cara blanca hacia arriba para que un participante tome una al azar y la voltee.

- Evento A: Voltear la tarjeta roja. ______
- Evento B: Seleccionar una tarjeta que no sea roja. ______
- Evento C: Voltear la tarjeta amarilla o la azul. ______
- Evento D: Seleccionar la tarjeta verde o la amarilla o la azul. ______
- Evento E: Que suceda el evento C o el evento D. ______
- ¿Cuál fue su procedimiento para obtener la probabilidad de los eventos? ______
- ¿Cómo son entre sí los eventos A y B? Justifiquen su respuesta. ______
- ¿Consideran que los eventos C y D son mutuamente excluyentes? ¿Por qué? ______

b) Con base en los últimos 20 partidos de un equipo de futbol, se determinó que la probabilidad de anotar dos goles por partido es 0.2; de anotar un gol, 0.3, y de no anotar, 0.35.

- Evento W: En un partido el equipo no anota goles o anota sólo uno. ______
- Evento X: En un partido el equipo anota uno o dos goles. ______
- Evento Y: En un partido el equipo no anota goles o anota uno o anota dos. ______

- Evento Z: En un partido el equipo anota tres o más goles. ______
- Anoten en sus cuadernos el procedimiento que siguieron para calcular la probabilidad de ocurrencia de los eventos anteriores.
- ¿Cómo son entre sí los eventos "no anotar goles" y "anotar un gol"? ______
- ¿Cómo se calcula la probabilidad de ocurrencia de un evento compuesto por dos eventos mutuamente excluyentes, pero no complementarios? Justifiquen su respuesta. ______

2 En grupo, compartan sus respuestas y conclusiones con otra pareja. Si se presentan inconsistencias, corríjanlas con ayuda de su profesor.

Para calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento compuesto por dos o más eventos mutuamente excluyentes, se suman sus probabilidades independientes. Por ejemplo, si M y N son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(M \text{ o } N) = P(M) + P(N)$.

La igualdad anterior se denomina *regla de la suma*.

3 Discutan en plenaria cómo calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos que no son mutuamente excluyentes, pero que pertenecen a un mismo experimento aleatorio. Anoten las conclusiones en su cuaderno.

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de eventos

1 En parejas, analicen las siguientes situaciones y contesten lo que se pide. Justifiquen sus respuestas en su cuaderno.

a) En una urna hay 38 pelotas numeradas del 5 al 42 y se extrae una al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el número que se extraiga sea mayor que 40? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea menor o igual que 10? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de extraer un número menor o igual a 10 o mayor que 40? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que sea múltiplo de 2 o múltiplo de 5? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener algún número que sea múltiplo de 3 o múltiplo de 7? ______
- Escriban un evento compuesto por dos eventos mutuamente excluyentes y otro por dos eventos que no sean mutuamente excluyentes. ______

- Intercambien sus ejemplos con otra pareja y determinen cómo son entre sí los eventos de la otra pareja. Analicen y verifiquen sus respuestas. Corrijan y discutan los posibles errores.

2 En grupo, cada pareja exponga uno de sus ejemplos y analícenlos. Corrijan los errores que se presenten con apoyo de su profesor.

Regresa y revisa

1 Retoma el problema de la situación inicial; considera que no hay empates y contesta. Al terminar comenta y verifica tus respuestas en grupo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda el caballo 78? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda el caballo 106 o el 25? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda el caballo 78 o el 5, o el 99 o el 106, o el 25? ¿Qué significa ese resultado? ______

Resuelve y practica

1. Analiza las siguientes situaciones y responde. Justifica tus respuestas.

   a) Pedro y Matías son hermanos y guardan sus calcetines en una caja. En total tienen 16 pares, de los cuales 5 son de Pedro.

   - ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un par al azar éste sea de Matías? ______
   - ¿Y cuál es la probabilidad de que sea de Pedro? ______

   b) En un debate entre tres candidatos a la presidencia municipal, cada asistente apoya a un solo candidato: 13 personas apoyan al candidato A, 17 prefieren al candidato B y 10, al C.

   - ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una persona al azar su candidato favorito sea el A o el B? ______
   - ¿Cuál es la probabilidad de que su candidato favorito sea el A o el C? ______
   - ¿Cuál es la probabilidad de que su candidato favorito sea el B o el C? ______
   - ¿Cuál es la probabilidad de que su candidato favorito no sea el A ni el B ni el C? ______

2. En grupo, comenten sus respuestas. Discutan y corrijan los posibles errores.

Construcción de diseños con transformaciones

Memorama de transformaciones geométricas

1 En esta actividad construirán un memorama.

- En equipos, reúnan el siguiente material: una cartulina blanca, marcadores y lápices de colores, una regla graduada, tijeras, pegamento y dos juegos de 10 dibujos de su preferencia, como los de la figura 2.A.1.

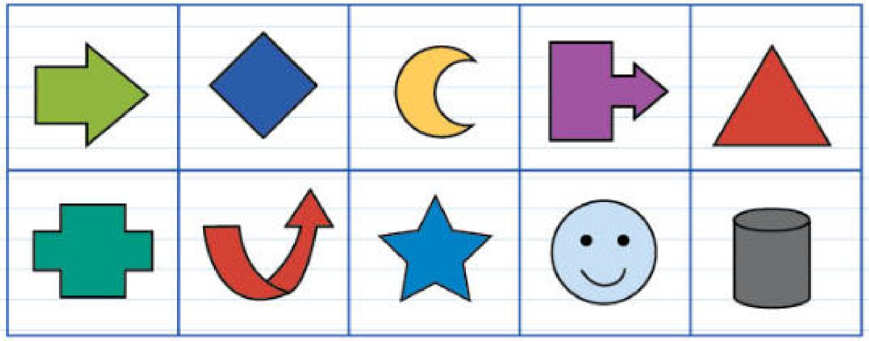


Fig. 2.A.1.

- Tracen en la cartulina dos cuadrículas de 5 por 4 cuadrados del mismo tamaño, como en la figura 2.A.2.

Fig. 2.A.2.

- Copien en una cuadrícula los dibujos que eligieron.
- Recorten los cuadrados para obtener 20 fichas y revuélvanlas. ¡Ya están listos para comenzar a jugar!

2 Instrucciones del juego.

Jugar memorama es muy sencillo, y seguramente ya conocen las reglas, pero en esta ocasión vamos a variarlas un poco.

- Coloquen las fichas con la parte blanca hacia arriba sobre la cuadrícula que trazaron, de manera que cada ficha quede sobre un cuadrado.
- Por turnos, cada jugador volteará dos fichas. Si son iguales, el jugador deberá identificar el tipo de transformación por la que se puede obtener una de las figuras a partir de la otra. En caso de responder correctamente, las retirará del tablero, pero si su respuesta es incorrecta, será el siguiente jugador quien tenga la oportunidad de identificar el tipo de transformación. Si acierta, podrá retirarlas del tablero, y en caso contrario, el siguiente jugador tendrá la oportunidad de identificarla.

Por ejemplo, si un jugador al voltear las fichas obtiene algo como lo que se muestra en la figura 2.A.3, indicará el tipo de transformación con el que se obtiene una figura a partir de la otra, el centro de rotación y el ángulo de giro, o eje de simetría (según el tipo de transformación que señale).

Si el jugador obtiene algo similar a lo que ilustra la figura 2.A.4, indicará en grados el giro de la figura y la directriz para trasladar la figura. ¿Cuál es, entonces, la respuesta para este ejemplo?

Por supuesto que las respuestas serán más complicadas entre más lejos estén las figuras. Por ejemplo, ¿cuál es la transformación correspondiente en la figura 2.A.5?

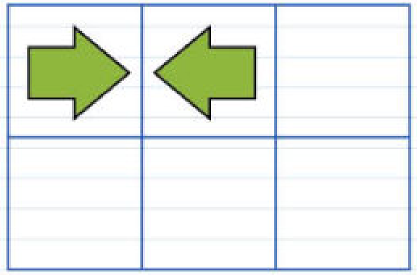


Fig. 2.A.3.

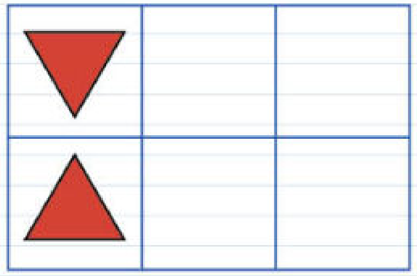


Fig. 2.A.4.

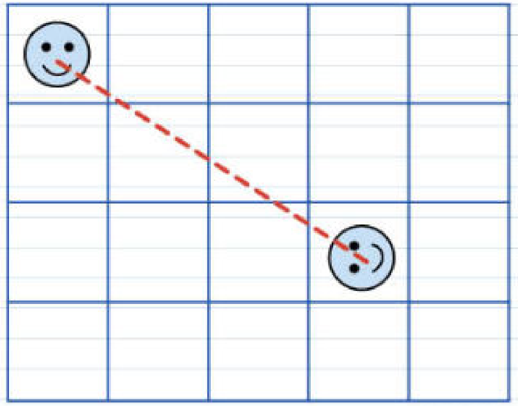


Fig. 2.A.5.

- Gana el jugador que reúna el mayor número de pares de figuras.

Cálculo de probabilidad en eventos mutuamente excluyentes

En esta sección usarás una hoja de cálculo para presentar los datos de un espacio muestral en un experimento probabilístico, así como analizar si los eventos representados son o no mutuamente excluyentes.

1 En esta actividad ejemplificaremos el lanzamiento de un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar los dados la suma de sus caras cumpla las siguientes condiciones?

A: Que la suma de las caras sea 4.
B: Que la suma de las caras sea mayor que 6.

- Abre una hoja de cálculo. Ubica el número de puntos de las caras de los dados en la primera fila y la primera columna, como muestra la figura 2.H.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		1	2	3	4	5	6	
2	1	2						
3	2							
4	3							
5	4							
6	5							
7	6							
8								

Fig. 2.H.1.

- Llena la tabla con los resultados de la suma de las caras de los dados; puedes hacerlo seleccionando la celda B2 y escribiendo: *"=$B$1+A2"* (los signos *$* permiten que ese valor no se modifique). Esta fórmula indica que se sumarán los números de las celdas *B1* y *A2*, las cuales corresponden a los puntos de las caras de los dados.
- Posiciona el cursor en la parte inferior derecha de la celda donde escribiste la fórmula y arrastra hacia abajo hasta la fila del último dato. De esta manera obtendrás las sumas correspondientes a esa columna; observa la figura 2.H.1.
- Haz lo mismo para todas las columnas, pero fija el valor de la columna correspondiente; por ejemplo, para la columna *C* escribe: *"=$C$1+A2"*. Al final, obtendrás una tabla como la de la figura 2.H.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		1	2	3	4	5	6	
2	1	2	3	4	5	6	7	
3	2	3	4	5	6	7	8	
4	3	4	5	6	7	8	9	
5	4	5	6	7	8	9	10	
6	5	6	7	8	9	10	11	
7	6	7	8	9	10	11	12	
8								

Fig. 2.H.2.

- Para contar los elementos del espacio muestral, selecciona una celda en blanco, da clic en el ícono *fx*, que corresponde con *Insertar función*; aparecerá una ventana con todas las funciones de la hoja de cálculo. Selecciona la categoría *Estadísticas* (figura 2.H.3); en la lista de funciones busca y elige la de *CONTARA* (figura 2.H.4) y oprime *Aceptar*.

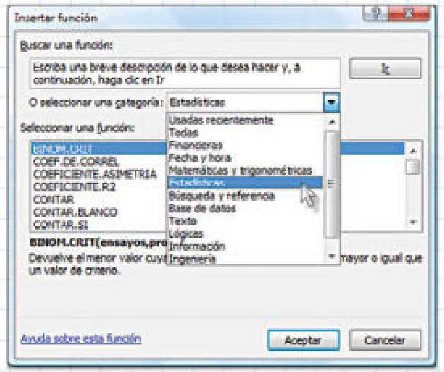


Fig. 2.H.3.

- En la ventana *Argumentos de función* posiciona el cursor en el campo *Valor 1* y escribe *B2:G7*, que corresponde con las celdas de los datos a analizar (figura 2.H.5); presiona *Aceptar*.
- En la celda en la que te posicionaste antes de aplicar esta función verás el número de celdas que contienen a los elementos del espacio muestral (36 celdas).

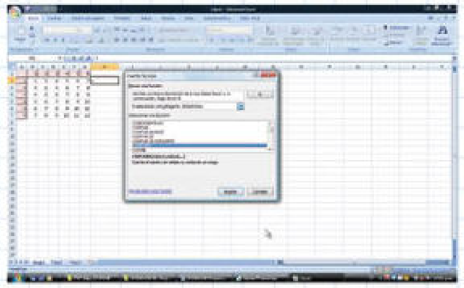


Fig. 2.H.4.

- Para contar los casos favorables para el evento *A* (*Que la suma de sus caras sea 4*), selecciona una celda en blanco, haz clic en el ícono *fx*, selecciona la función *CONTAR.SI* y oprime *Aceptar*. En el campo *Rango* escribe: *B2:G7* y en el campo *Criterio*, el número *4*, que es la condición que buscamos para el evento *A* (figura 2.H.6); oprime *Aceptar*.
- Para conocer el número de casos que pertenecen al evento *B* (*Que la suma de las caras sea mayor que 6*), elige una celda en blanco donde quieras obtener el resultado; da clic en el ícono *fx* y haz lo mismo que para el caso anterior, pero ahora llena el campo de *Criterio* con la condición *>6*. En la celda aparecerá el número de casos que cumplen con esa condición (figura 2.H.7).

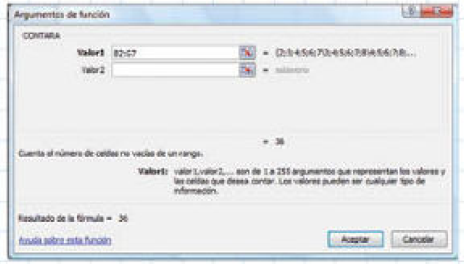


Fig. 2.H.5.

Y ahora, ¿cómo puedes saber si los eventos *A* y *B* son mutuamente excluyentes?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		1	2	3	4	5	6				
2	1	2	3	4	5	6	7		Elementos del espacio		
3	2	3	4	5	6	7	8		muestral=	36	
4	3	4	5	6	7	8	9				
5	4	5	6	7	8	9	10		A=Que la suma sea 4		
6	5	6	7	8	9	10	11			3	
7	6	7	8	9	10	11	12				
8									B=Que la suma sea mayor que 6		
9										21	
10											

Fig. 2.H.7.

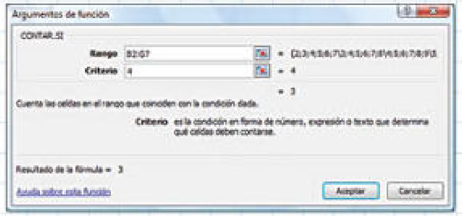


Fig. 2.H.6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		1	2	3	4	5	6	
2	1	2	3	4	5	6	7	
3	2	3	4	5	6	7	8	
4	3	4	5	6	7	8	9	
5	4	5	6	7	8	9	10	
6	5	6	7	8	9	10	11	
7	6	7	8	9	10	11	12	
8								

Fig. 2.H.8.

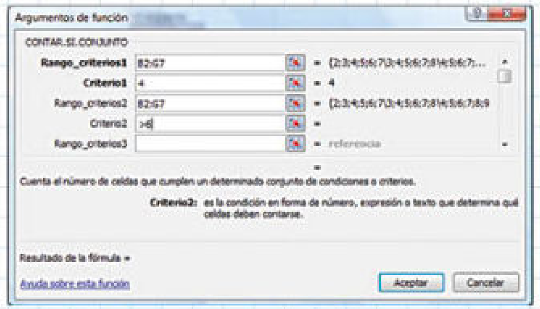


Fig. 2.H.9.

- Al resaltar con color las celdas que cumplen las condiciones de los eventos *A* y *B*, observarás que son mutuamente excluyentes porque no comparten elementos (figura 2.H.8), pero si quisieras saberlo sin necesidad de analizar los datos de la tabla, haz lo siguiente.
- Selecciona la celda en blanco donde quieras que aparezca el resultado, haz clic en el ícono *fx*, selecciona la función *CONTAR.SI.CONJUNTO* y oprime *Aceptar*.
- Aparecerá la ventana *Argumentos de función*; en el campo de *Rango_criterios1* escribe el rango: *B2:G7*. En el campo *Criterio1* escribe el número *4*, que es la condición para que ocurra el evento *A*.
- En el campo *Rango_criterios2* escribe nuevamente el rango *B2:G7* y en el campo *Criterio2* escribe *>6*, que es la condición para que ocurra el evento *B*. Oprime *Aceptar* (figura 2.H.9.).

Observa que el resultado es cero, con lo cual puedes garantizar que ambos eventos son mutuamente excluyentes. Si el resultado es distinto de cero, significa que los eventos no son mutuamente excluyentes; el número indicado señalará la cantidad de resultados comunes.

2 Modifica tu tabla de manera que refleje los resultados de lanzar un dado tetraédrico y otro octaédrico. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

3 Determina si los siguientes pares de eventos son o no mutuamente excluyentes. Si no lo son, calcula cuántos elementos tienen en común.

A: Que la suma de las caras sea mayor o igual a 5.
B: Que la suma sea menor que 8.

A: Que la suma sea mayor que 3.
B: Que la suma sea mayor que 10.

A: Que la suma sea menor que 6.
B: Que la suma sea mayor que 8.

1 Lee cada uno de los siguientes enunciados.

2 Señala si es falso (F) o verdadero (V).

3 Explica cómo verificarías tu respuesta.

Enunciado	F	V	Propuesta de verificación
a) Dos factorizaciones de la ecuación $3x^2 + 12x + 9 = 0$ son $(x + 1)(3x + 9) = 0$ y $(3x + 3)(x + 3) = 0$.			
b) Si a una figura se le aplica una rotación de 45° en sentido horario y después otra de 405° en sentido contrario, la figura regresa a su posición inicial.			
c) Rotar y después trasladar una figura equivale a aplicarle primero la traslación y después la rotación.			
d) Con mosaicos de 10 cm de lado se cubre un cuadrado de 25 m². Los mosaicos se pueden reacomodar, sin romper, para formar dos cuadrados distintos.			
e) La base de una escalera de 17 m de longitud se debe apoyar a 9 m de una pared para alcanzar sobre ella una altura de 15 m.			
f) Si la probabilidad de ganar un juego de azar es de $\frac{1}{6}$ y la probabilidad perder, de $\frac{7}{12}$, entonces la probabilidad de empatar es de $\frac{1}{6}$.			

4 Revisa en la página 111 qué enunciados son falsos y cuáles verdaderos. Retoma en tu libro los temas de las respuestas erróneas; de ser necesario, replantea tus propuestas de verificación y aplícalas.

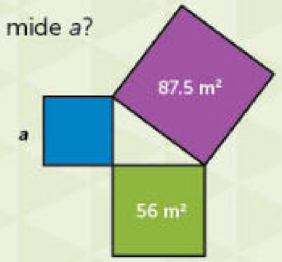
1 A un cuadrado de x unidades de lado se le quita un cuadrado de 2 unidades de lado que se encuentra en una de sus esquinas. Si el área resultante es de 45 cm², ¿cuál de las siguientes expresiones no representa el problema?

a) $x^2 - 4 = 45$
b) $x^2 - 49 = 0$
c) $(x + 7)(x - 7) = 0$
d) $(x - 2)^2 = 45$

2 ¿Qué transformación o transformaciones no permiten obtener uno de los siguientes hexágonos a partir del otro?

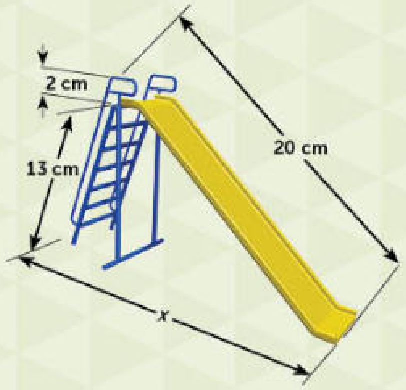
a) Traslación y rotación.
b) Rotación y traslación.
c) Simetría central.
d) Simetría respecto a una recta.

3 Analiza el arreglo de los cuadrados. ¿Cuánto mide a?



a) 5.6 m
b) 1.87 m
c) 31.5 m
d) 1 m

4 Una resbaladilla de juguete tiene las medidas que se indican en la imagen. Si su altura (del suelo al borde de las agarraderas) es de 14 cm, ¿cuál es la longitud total del juguete?



a) 42 cm
b) 40 cm
c) 21 cm
d) 22.5 cm

5 Si la probabilidad de contagio de cierta enfermedad es de 2%, ¿cuál es la probabilidad de no contagio?

a) $\frac{49}{50}$
b) $\frac{98}{1000}$
c) $\frac{48}{50}$
d) $\frac{2}{100}$

1 A Lucy y Miguel los separa una ventana que tiene una película reflejante, de modo que Lucy se ve como si estuviera frente a un espejo, mientras sostiene una cartulina con la figura geométrica que se muestra.

a) Dibuja la forma de la figura que Lucy ve en la película reflejante.

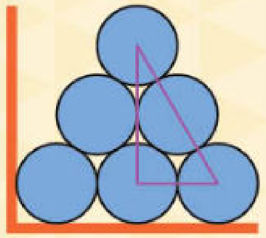
b) Dibuja la figura que ve Miguel.

c) Dibuja la forma que tendría la figura si Miguel la viera de cabeza.

d) Completa la tabla según el enunciado sea falso o verdadero.

Enunciado	F	V
Los ángulos interiores de la figura que Lucy ve en el reflejo son menores que en la figura original.		
La figura que observa Miguel tiene las mismas medidas de la figura original.		
Al rotar la figura 90° a la derecha, en la película reflejante varían las medidas de los ángulos y los lados que se proyectan.		
Si Miguel tuviera la cartulina, la figura que Lucy observaría estaría invertida 180° respecto a la original.		

2 En una repisa de madera se colocan seis tambores como ilustra la figura. Si el diámetro de cada tambor es de 40 cm, ¿cuál es la altura de la repisa?



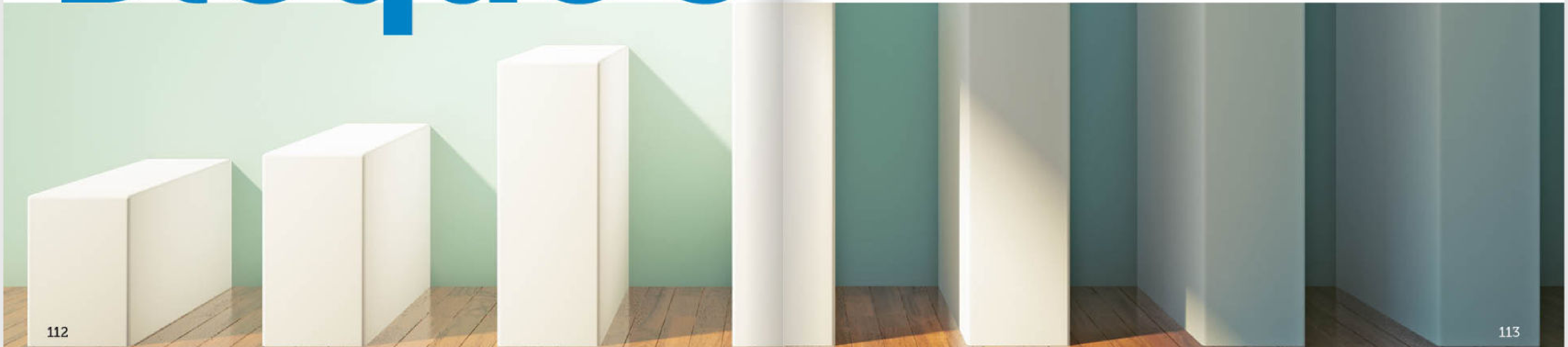
Respuestas de la autoevaluación de la página 109. Enunciados falsos: e), f); enunciados verdaderos: a), b), c), d).

A

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Bloque 3



C

Contenidos

Sentido numérico y pensamiento algebraico

- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Forma, espacio y medida

- Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
- Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.
- Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Manejo de la información

- Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.
- Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.
- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Las sombras que proyectan objetos cercanos, a causa de una fuente de luz suficientemente lejana, son proporcionales entre sí, y por tanto, forman el mismo ángulo con la horizontal; esta propiedad ha sido utilizada desde la Antigüedad para determinar distancias inaccesibles. Tales de Mileto calculó con este procedimiento la altura de las pirámides egipcias, y Eratóstenes estimó la circunferencia de la Tierra.

1. Un método para resolver ecuaciones cuadráticas

Situación inicial

Las dimensiones de una cancha de futbol

Carlos juega futbol en una cancha que tiene 37 m más de largo que de ancho. Si el área total de la cancha es de 7 140 m², ¿cuáles son sus dimensiones?

Analiza

1. En parejas, respondan lo siguiente.
   a) Escriban una expresión algebraica que represente el problema.
   ____
   b) Resuelvan el problema.
   c) ¿Qué procedimiento utilizaron? ¿Cómo saben si su resultado es correcto? ______________________________
   ____
2. En grupo, comparen sus respuestas y procedimientos con los de otra pareja. Verifiquen que sean correctos con ayuda de su profesor.

Explora y construye

Ecuaciones cuadráticas de una variable

1 En equipos, realicen y respondan lo que se pide.

Un arquitecto quiere construir un jardín de 20 m de largo, 15 m de ancho y un andador que lo rodee como muestra la figura 3.1.1 de la página siguiente. El ancho del andador será el mismo a los costados y en la parte superior del jardín.

a) Si el área del jardín es igual a la del andador, ¿cuáles son las dimensiones de todo el terreno?

Fig. 3.1.1.

b) Resuelvan las ecuaciones.
- $c^2 + 3c + 2.16 = 0$
- $t^2 - 2.1t + 0.8 = 0$
- $3x^2 + 2.25x - 48.18 = 0$

c) ¿Lograron resolver el problema y las ecuaciones? ¿Qué procedimientos utilizaron? ¿Qué problemas tuvieron? ______________________________
____

d) Compartan y comenten sus respuestas y procedimientos con los de otras dos parejas y comenten las dificultades que se hayan presentado. ______________________________
____

A veces factorizar una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ u obtener su solución por otros métodos, como por prueba y error, son procedimientos ineficientes.

Para esos casos, y para cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se puede utilizar la siguiente igualdad obtenida al despejar x, conocida como *fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas en una variable*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El símbolo $\pm$ se lee "más menos" y significa que se consideran dos casos: en el primero, al coeficiente negativo del término lineal (b) se suma la raíz, y en el segundo se resta.

Por ejemplo, en la ecuación $3x^2 + 8x + 3.25 = 0$ se tiene $a = 3$, $b = 8$ y $c = 3.25$. Al sustituir esos valores en la fórmula general se obtienen dos igualdades:

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{(8)^2 - 4(3)(3.25)}}{2(3)} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-8 - \sqrt{(8)^2 - 4(3)(3.25)}}{2(3)}$$

Al simplificar las ecuaciones se obtiene: $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{13}{6}$
Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $3x^2 + 8x + 3.25 = 0$ son $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{13}{6}$.

Observa que la fórmula depende de los valores a, b y c, de modo que es importante identificarlos correctamente en la ecuación que se resolverá:
- a es el coeficiente de la variable cuadrática (x^2): juntos son el *término de segundo grado o cuadrático* (ax^2) de la ecuación.
- b es el coeficiente de la variable lineal (x): en conjunto son el *término de primer grado o lineal* (bx) de la ecuación.
- c es el *término independiente*.

2 En parejas, realicen lo siguiente.

a) Escriban con detalle la simplificación de las igualdades:

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{(8)^2 - 4(3)(3.25)}}{2(3)} =$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{(8)^2 - 4(3)(3.25)}}{2(3)} =$$

b) Comprueben que las soluciones de la ecuación $3x^2 + 8x + 3.25 = 0$ son $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{13}{6}$.

c) Resuelvan en su cuaderno las ecuaciones de la actividad 1 anterior mediante la fórmula general y su calculadora. Comprueben que sus resultados sean correctos.

3 En grupo, comparen sus respuestas con las de otras parejas. Corrijan los errores que se presenten.

El discriminante

1 En equipos, realicen lo que se pide.

a) Escriban una ecuación cuadrática que represente cada situación y resuélvanlas a partir de la fórmula general. Pueden utilizar calculadora.

- El cuadrado de un número más su doble suman 35. ¿De qué número se trata?
- La suma del cuadrado de un número más cuatro veces el mismo número es −4. ¿Cuál es ese número?
- El producto de dos números es 4 y su suma, 1. ¿De qué números se trata?

b) Determinen cuántas soluciones tiene cada ecuación y comparen sus respuestas con las de otro equipo.

La expresión algebraica $b^2 - 4ac$ en la raíz cuadrada de la fórmula general se llama *discriminante* de la ecuación.

c) Calculen en su cuaderno el valor del discriminante de las ecuaciones que escribieron en el inciso a).

2 En parejas, calculen el discriminante de las siguientes ecuaciones y resuélvanlas con la fórmula general.

- $x^2 - 6x + 3 = 0$ ______
- $x^2 + 8x + 17 = 0$ ______
- $x^2 + 4x + 4 = 0$ ______
- $5x^2 + 70x + 245 = 0$ ______
- $3x^2 + 18x - 165 = 0$ ______
- $2x^2 - x + 1 = 0$ ______

3 ¿Qué relación observan entre el valor del discriminante y el número de soluciones de las ecuaciones de las actividades 1 y 2 anteriores? Escriban en su cuaderno sus conclusiones.

4 En grupo, comparen sus respuestas y conclusiones. Determinen, con apoyo de su profesor, la utilidad del discriminante para conocer el número de soluciones de una ecuación. Comenten y corrijan los errores que se presenten.

Glosario

números reales. Es el conjunto de los números enteros y decimales, así como los que se pueden expresar como uno de los dos anteriores. Por ejemplo, 324, $\frac{6}{3}$, $-\frac{17}{5}$, π, −2.54, $\sqrt{2}$.

El discriminante de una ecuación cuadrática en una variable permite determinar el número de soluciones que tiene en los **números reales**, sin necesidad de resolverla:
— Si el discriminante es mayor que 0, entonces la ecuación tiene dos soluciones.
— Si el discriminante es igual a 0, entonces la ecuación tiene una solución.
— Si el discriminante es menor que 0, entonces la ecuación no tiene solución.

Problemas con ecuaciones cuadráticas

1 En parejas, planteen una ecuación para cada problema, resuélvanla con la fórmula general y contesten.

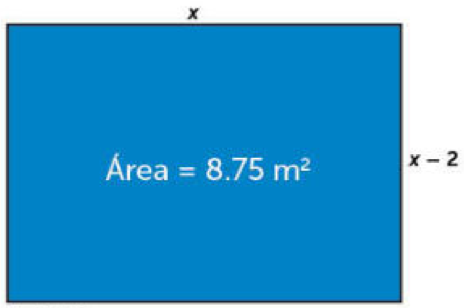


Fig. 3.1.2.

a) ¿Cuál es la medida del ancho del rectángulo de la figura 3.1.2?

- Ecuación: ______
- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ¿Por qué?
______
______
- ¿Cuántas soluciones tiene el problema?, ¿cuáles son?
______
______

b) Un número multiplicado por su sucesor es igual a 506.

- Ecuación: ____________________
- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ¿Por qué? ____________________
- ¿Cuántas soluciones tiene el problema?, ¿cuáles son? Justifiquen su respuesta. ____________________

c) El sucesor multiplicado por el antecesor de un número es igual a 360.

- Ecuación: ____________________
- ¿Qué números cumplen la condición del problema? ¿Por qué? ____________________

d) La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 313.

- Ecuación: ____________________
- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? Argumenten su respuesta. ____________________
- ¿Qué número satisface el problema? ¿Por qué? ____________________

2 En grupo, comparen y comenten sus respuestas y procedimientos anteriores. Expliquen por qué el determinante puede indicar que una ecuación tiene dos soluciones, pero sólo una es solución del problema.

3 Lee y contesta lo siguiente.

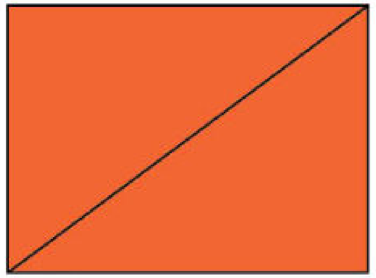


Fig. 3.1.3.

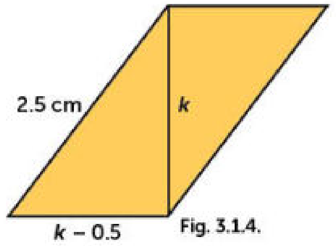


Fig. 3.1.4.

a) La diagonal del rectángulo de la figura 3.1.3 mide 15 cm y el largo de éste, 3 unidades más que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

- ¿Qué tipo de triángulos se forman con la diagonal? ____________________
- Plantea una ecuación para obtener las dimensiones del rectángulo y resuélvela. ____________________

b) Una de las diagonales del romboide de la figura 3.1.4 lo divide en dos triángulos rectángulos. ¿Cuál es el área del romboide?

- Escribe una ecuación con la que puedas obtener sus dimensiones y resuélvela. ____________________
- ¿Cuál es el área del romboide? Justifica tu respuesta. ____________________

4 En grupo, comparen y comenten sus procedimientos. ¿Todos obtuvieron los mismos resultados? Con ayuda de su profesor, verifiquen que sean correctos y corrijan los errores que se puedan presentar.

Reflexiona

1. En parejas, contesten en su cuaderno.
   a) ¿Cuál debe ser el valor del coeficiente b en la ecuación $x^2 + bx + 9 = 0$ para que ésta tenga una sola solución?
   b) Escriban un valor de b para que la misma ecuación tenga dos soluciones y otro para el cual no tenga solución.
2. En grupo, comparen sus respuestas. ¿En qué casos las respuestas de todos son iguales? ¿En cuáles no? ¿A qué creen que se deba?

Regresa y revisa

1 Regresa al problema de la situación inicial y responde lo siguiente.

Para los partidos internacionales, según indica la Federación Internacional de Futbol Asociación (FIFA), el área máxima de una cancha es 1 110 m² más grande que la cancha en la que juega Carlos.

a) Si, además, el perímetro máximo de la cancha es 24 m más largo, ¿cuáles son sus dimensiones? ____________________

Resuelve y practica

1. Resuelve en tu cuaderno las siguientes situaciones.
   a) La superficie de un terreno rectangular es de 7 000 m² y su largo es 30 m mayor que el ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?
   b) Si dos números suman 10 y su producto es 24, ¿cuáles son esos números?
   c) ¿Qué número positivo elevado al cuadrado más dos veces él mismo es igual a 960?
   d) El cuadrado de un número y su triple suman 70. ¿De qué número se trata?
   e) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 265. ¿Cuáles son esos números?
2. En equipos, resuelvan el siguiente problema en su cuaderno.

   Sandra compró orquídeas en un invernadero para venderlas. En total invirtió \$2 400.00. Diana compró, en otro invernadero, tres orquídeas más que Sandra a \$40.00 menos cada una y pagó lo mismo.

   a) ¿Cuántas orquídeas compró cada una?
   b) Si ambas las venderán a \$300.00, ¿cuál será la ganancia de cada una por cada orquídea vendida?
3. En grupo, compartan y comparen sus resultados y procedimientos. Verifiquen, con apoyo de su profesor, que sean correctos y corríjanlos si es necesario.

2. Problemas y triángulos

Situación inicial

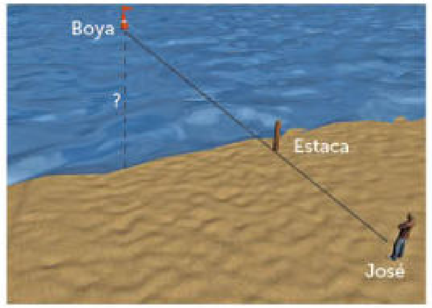


Fig. 3.2.1.

¿A qué distancia se encuentra la boya?

La figura 3.2.1 muestra la ubicación de José, una estaca y una boya en el mar. Si José puede hacer mediciones de ángulos y longitudes en la playa, pero no en el mar, ¿qué medidas necesita obtener para determinar la distancia entre la boya y la playa? ¿A qué distancia de la playa se encuentra la boya?

Analiza

1. En equipos, analicen la situación y determinen qué procedimiento debe seguir José para obtener la distancia entre la boya y la playa. Anótenlo a continuación. ____________

____

____

2. Compartan su respuesta con la de otro equipo, ¿cómo son entre sí los procedimientos que propusieron? ____________________________

____

   a) ¿Algún procedimiento les parece más adecuado? ¿Por qué? ____________

   ____

   b) En grupo, con ayuda de su profesor propongan algunas medidas mínimas para el problema y resuélvanlo.

3. Validen sus resultados y procedimientos en grupo con apoyo de su profesor.

Explora y construye

Problemas con geometría

1 En equipos, resuelvan los siguientes problemas. Justifiquen en su cuaderno.

a) ¿Qué condiciones debe cumplir un triángulo para que, al dividirlo con un segmento de recta, se generen dos triángulos congruentes entre sí?
   - Argumenten sus respuestas en grupo y establezcan una conclusión.

b) El primer trabajo de Jimena, recién graduada en Ingeniería Civil, es la construcción de un puente para cruzar el río en una comunidad rural. Antes de iniciar el proyecto debe calcular el ancho del río con un teodolito. Primero lo colocó a 30 cm de una orilla y lo apuntó hacia la otra, como se ilustra en la figura 3.2.2; después lo giró hacia la izquierda, de modo que el ángulo que forma el instrumento con la vertical se mantuviera sin cambio hasta ver el suelo del lado en el que ella se encontraba. Finalmente midió con una cinta métrica las longitudes que se muestran. ¿Cuál es el ancho del río?

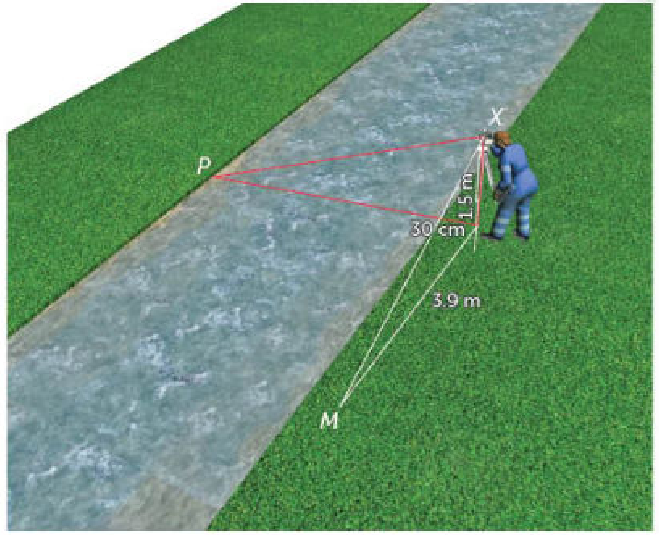


Fig. 3.2.2.

Glosario

teodolito. Instrumento con el que se miden ángulos.

2 Compartan con otro equipo su resultado y verifiquen que sea correcto. Valídenlo con apoyo de su profesor.

3 En parejas, analicen el paralelogramo *LMPN* de la figura 3.2.3, en el que $\overline{BF} \parallel \overline{ED}$ y $\overline{ED} = \overline{EB}$, y obtengan las medidas que se piden. Justifiquen todas sus respuestas.

a) $\overline{DF}$ = ____________

____

____

____

b) $\measuredangle BQP$ = ____________

____

____

____

c) $\measuredangle LDJ$ = ____________

____

____

____

d) $\overline{JL}$ = ____________

____

____

____

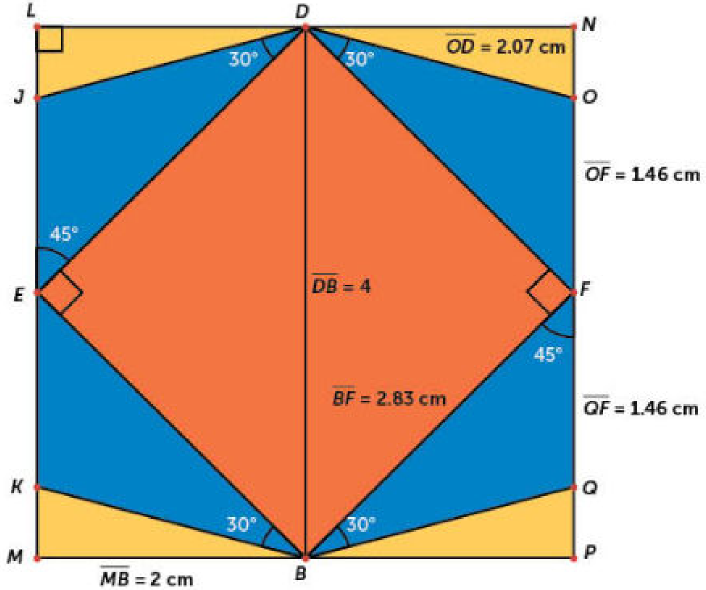


Fig. 3.2.3.

4 Verifiquen sus respuestas y su argumentación con otra pareja. Corrijan los errores con apoyo de su profesor.

5 En parejas, determinen para cada caso si se obtienen triángulos semejantes. Justifiquen sus respuestas.

a) Dos triángulos equiláteros. ______

b) Dos triángulos rectángulos. ______

c) Dos triángulos isósceles. ______

d) Dos triángulos rectángulos isósceles. ______

e) Dos triángulos acutángulos isósceles. ______

f) Un triángulo cualquiera y otro cuyos lados son proporcionales a los del primero. ______

g) Dos triángulos rectángulos: los catetos de uno miden el doble que los catetos del otro. ______

6 En grupo, verifiquen sus respuestas anteriores con apoyo de su profesor.

7 En parejas, resuelvan los siguientes problemas. Anoten su procedimiento y justifiquen sus respuestas.

a) La figura 3.2.4 ilustra la trayectoria de un balón de voleibol después de un remate. El jugador defensor trató de detener el balón, pero sólo lo rozó con los dedos. ¿A qué altura remató el delantero?

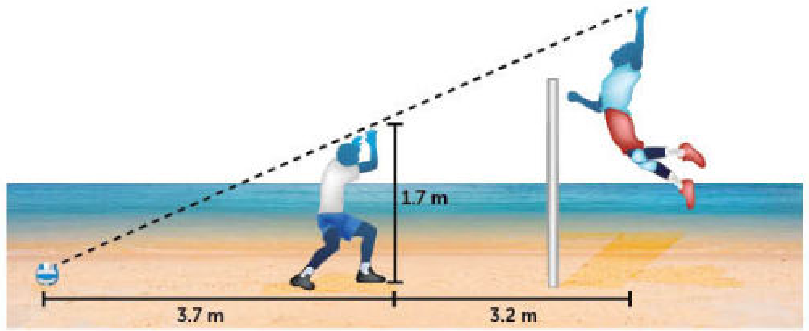


Fig. 3.2.4.

b) En la figura 3.2.5, los puntos amarillos representan estacas; los cafés, árboles; la superficie azul, un lago, y los segmentos, cuerdas amarradas. ¿Cuánto mide de largo el lago si el segmento que une sus extremos es paralelo al segmento que une los árboles?

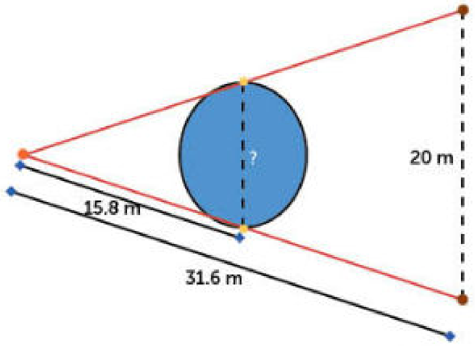


Fig. 3.2.5.

c) En una modalidad de la escalada deportiva, una persona asegura al escalador con una cuerda que pasa por una polea de soporte. La figura 3.2.6 representa al escalador a 6 m del suelo, a 90 cm del punto de la polea y a 80 cm de la cuerda que lo une con el asegurador. ¿A qué distancia aproximada de la pared se localiza el asegurador?

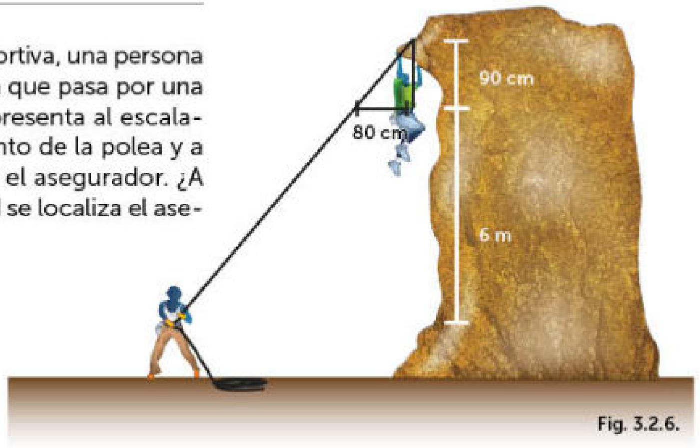


Fig. 3.2.6.

d) Lilian diseñó un logotipo como el de la figura 3.2.7, en el que $\overline{AC} \parallel \overline{DF} \parallel \overline{HI}$ y $\overline{BE} = \overline{EG}$, y quiere cubrir el perímetro con cinta de colores. ¿Cuánta cinta necesita?

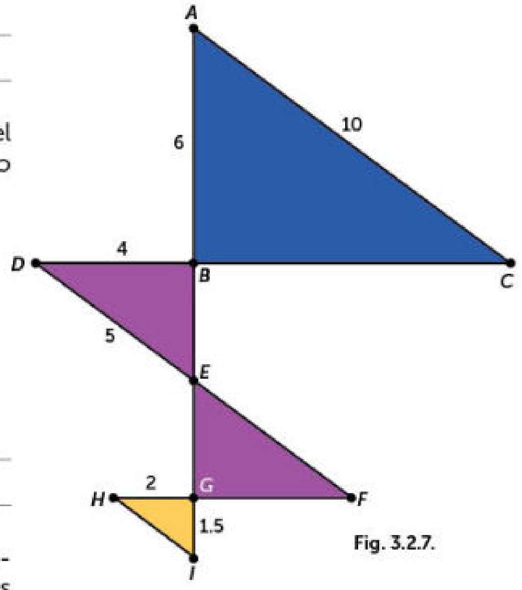


Fig. 3.2.7.

8 Compartan sus procedimientos con los de otra pareja. Determinen cómo comprobar si sus resultados son correctos y verifíquenlos con apoyo de su profesor.

Reflexiona

1. Analiza la figura 3.2.8, en la que $\overline{AD} \parallel \overline{CF}$ y $\overline{DB} \parallel \overline{FE}$, y contesta.

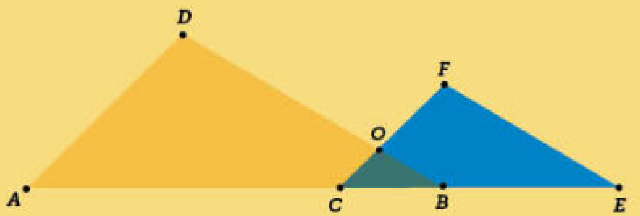


Fig. 3.2.8.

a) ¿Cómo son entre sí los triángulos *ABD* y *CEF* de acuerdo con la medida de sus ángulos? Justifica tu respuesta. __________

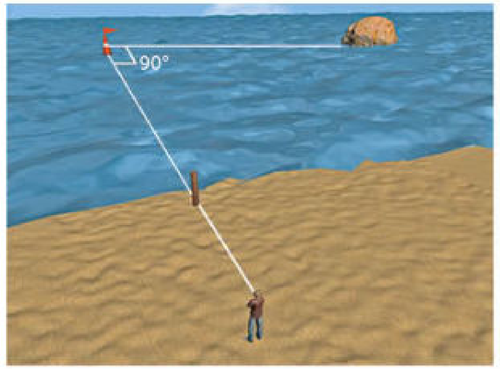
b) ¿El triángulo *CBO* es semejante a los triángulos *ABD* y *CEF*? ¿Por qué? __________

2. Compara tus respuestas y argumentos con un compañero, y verifíquenlos con apoyo de su profesor.

Regresa y revisa

1 En parejas, resuelvan, a partir de la figura 3.2.9, la siguiente variante del problema de la situación inicial.

a) Supongan que a 15 m de distancia de la estaca hay una roca en el mar. ¿Qué procedimiento debería seguir José para conocer la distancia entre la boya y la roca sólo con mediciones sobre la playa? __________



b) ¿Qué procedimiento seguirían si desconocen la distancia entre la roca y la estaca, pero saben que entre la boya y la playa hay 12 m? __________

Fig. 3.2.9.

3. El teorema de Tales

Situación inicial

El perímetro de la cuadra

Cada mañana, Gabriel corre 25 vueltas alrededor de la cuadra donde vive, la cual se representa en la figura 3.3.1. ¿Qué distancia recorre en total?

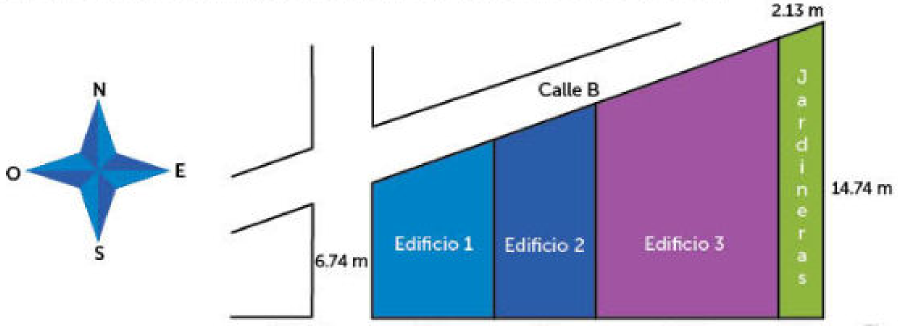


Fig. 3.3.1.

Analiza

1. Responde lo siguiente.
   a) Explica el procedimiento que seguiste para resolver el problema. __________
   b) ¿Cómo son entre sí las líneas divisorias entre los edificios y la que los separa de las jardineras? __________
   c) Si prolongas las calles A y B hacia el oeste, ¿qué figuras geométricas forman esas calles y las líneas que dividen los edificios y las jardineras? __________
   d) ¿Cómo son entre sí esas figuras? __________
2. En grupo, compartan y comparen sus procedimientos y respuestas. Con apoyo de su profesor verifiquen que sean correctos.

Explora y construye

¿Qué es el teorema de Tales?

1 En equipos, analicen el siguiente problema y respondan.

Para conocer la altura de un árbol, Ernesto realizó algunas medidas y se colocó de manera que el final de su sombra y el de la sombra del árbol coincidieran, como ilustra la figura 3.3.2 de la página siguiente.

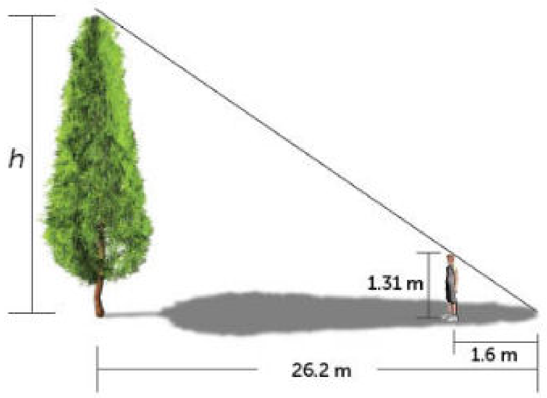


Fig. 3.3.2.

a) ¿Qué tipo de triángulos, de acuerdo con sus ángulos, se forman en la figura con la altura del árbol, su sombra y la proyección de la sombra, así como con la altura de Ernesto, su sombra y la proyección de su sombra? ¿Cómo son entre sí esos triángulos? ¿Por qué? ______

b) ¿Cómo se relacionan sus medidas?

c) ¿Cuál es la altura del árbol? Justifiquen su respuesta. ______

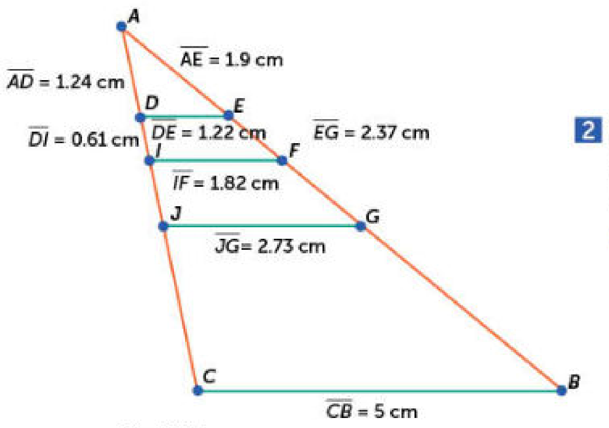


Fig. 3.3.3.

2 En equipos, analicen la figura 3.3.3, donde los segmentos verdes son paralelos entre sí, y realicen y respondan lo que se pide.

a) Indiquen los triángulos que se forman con los segmentos verdes y anaranjados, ¿cómo son entre sí? Justifiquen su respuesta. ______

b) ¿Cómo se relacionan las medidas de esos triángulos? ______

c) Obtengan la medida de los segmentos desconocidos de la figura 3.3.3. Realicen en su cuaderno las operaciones necesarias y expliquen su procedimiento.

- $\overline{EF}$ = ______
- $\overline{FG}$ = ______
- $\overline{GB}$ = ______
- $\overline{CJ}$ = ______
- $\overline{IJ}$ = ______

3 En grupo, compartan sus resultados y procedimientos. Con ayuda de su profesor, verifiquen que sean correctos y corrijan los errores que surjan.

Si a dos transversales las cortan dos o más rectas paralelas, los segmentos de una de las transversales, delimitados por las paralelas, son proporcionales a los segmentos de la otra transversal delimitados por las mismas paralelas.

Por ejemplo, en la figura 3.3.4:

$\frac{\overline{XA}}{\overline{XA'}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XB'}}$ $\quad \frac{\overline{XA'}}{\overline{XA''}} = \frac{\overline{XB'}}{\overline{XB''}}$ $\quad \frac{\overline{XA}}{\overline{XA''}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XB''}}$

Esta relación se conoce como *teorema de Tales*.

Además, dado que las transversales forman triángulos semejantes con las paralelas se concluye que:

$\frac{\overline{XA}}{\overline{XA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ $\quad \frac{\overline{XA'}}{\overline{XA''}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}}$ $\quad \frac{\overline{XA}}{\overline{XA''}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}}$

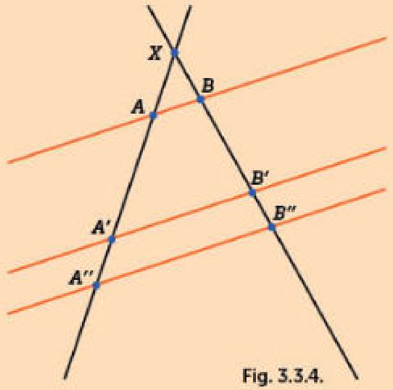


Fig. 3.3.4.

Aplicaciones del teorema de Tales

1 En parejas, observen la figura 3.3.5 y realicen lo que se indica.

El segmento $\overline{AC}$ se dividió en 6 partes iguales. Después se trazó una línea del punto *C* al *B* como se muestra.

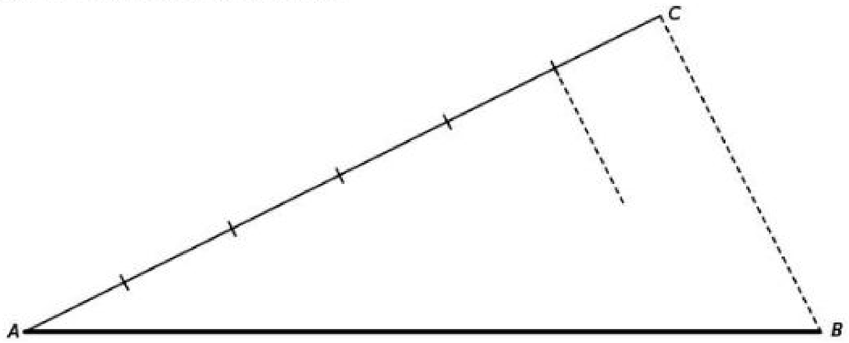


Fig. 3.3.5.

a) Tracen otros segmentos paralelos al $\overline{CB}$ que partan de las divisiones del segmento $\overline{AC}$ y corten al segmento $\overline{AB}$.

b) Consideren como divisiones del segmento $\overline{AB}$ los puntos en los que las líneas paralelas lo cortan. ¿En cuántas partes quedó dividido el segmento $\overline{AB}$?

c) ¿Cómo son entre sí los segmentos en los que se dividió el segmento $\overline{AB}$?

2 En parejas, dividan en su cuaderno, siguiendo el procedimiento anterior, un segmento de recta de 13 cm de longitud en 7 partes iguales. Utilicen el juego de geometría, pero sin realizar mediciones.

a) ¿Por qué funciona el procedimiento anterior? Justifiquen aplicando el teorema de Tales. ______

______

______

3 En parejas, analicen la figura 3.3.6, que muestra un segmento en una hoja rayada. Realicen y respondan lo que se pide.

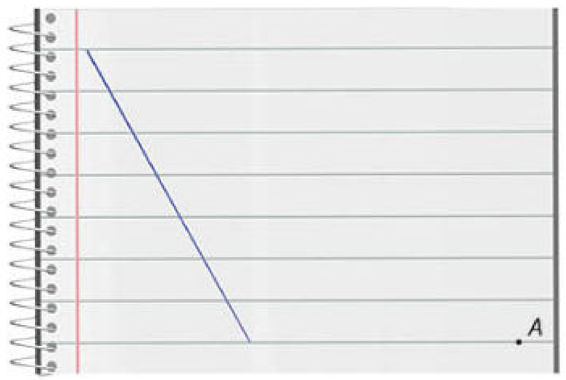


Fig. 3.3.6.

a) ¿En cuántas partes se divide el segmento con las rayas del cuaderno? ______

b) ¿Cómo son entre sí esas partes? Justifiquen su respuesta. ______

______

c) Tracen un segmento de 5 cm de longitud con un extremo en el punto A, de modo que las rayas del cuaderno lo dividan en seis partes iguales. Expliquen su procedimiento. ______

______

Toma nota

Localiza "teorema de Tales" en el glosario (págs. 256-258); explícalo con tus propias palabras y escribe un ejemplo.

Busca en...

www.edutics.mx/4uS donde podrás observar una construcción geométrica donde se verifica el teorema de Tales. (Consulta: 20 de enero de 2019).

4 En grupo, comparen sus procedimientos y verifiquen que sean correctos. Con ayuda de su profesor justifiquen el procedimiento anterior para dividir un segmento en n partes iguales a partir del teorema de Tales. ______

______

5 En parejas, tracen en su cuaderno segmentos de recta y divídanlos como se indica. Utilicen escuadras y compás, pero sin hacer mediciones. Expliquen su procedimiento.

a) En dos partes con una proporción de 1:5.

b) En dos partes con una proporción de 3:7.

c) En tres partes, de modo que una sea un sexto del segmento, otra un tercio y la tercera un medio.

6 En grupo, compartan y comenten sus procedimientos. Con apoyo de su profesor verifiquen que sean correctos.

Reflexiona

1. En grupo, analicen la figura 3.3.7 y determinen si mediante el teorema de Tales es posible obtener la medida de los segmentos $\overline{DA}$ y $\overline{EC}$. Justifiquen su respuesta.

______

______

______

______

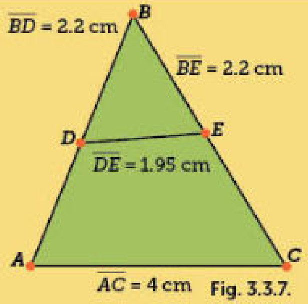


Fig. 3.3.7.

Regresa y revisa

1 Analiza la figura 3.3.8 y contesta lo que se pide. En grupo, verifiquen las respuestas.

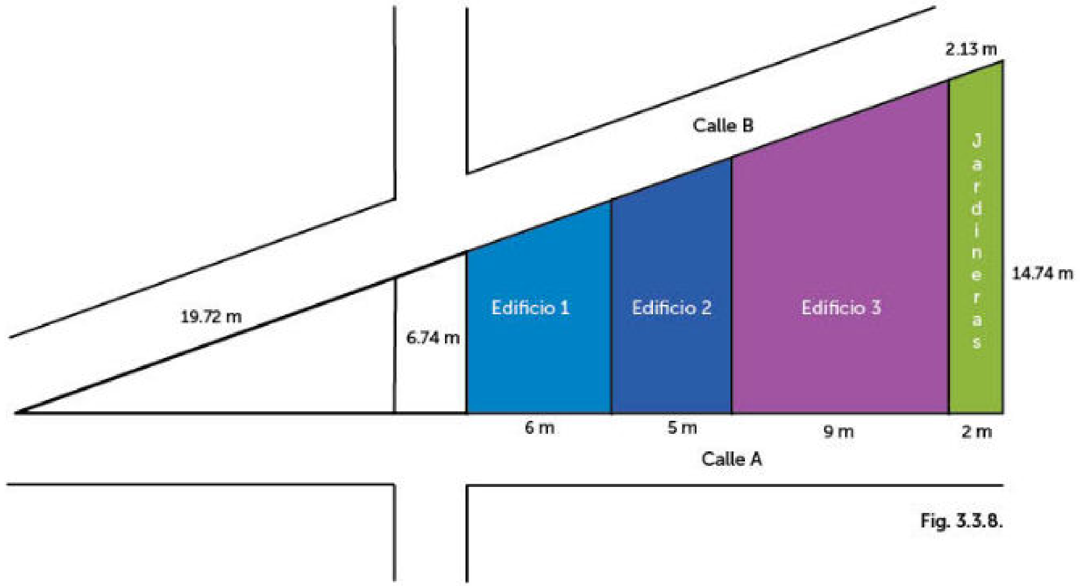


Fig. 3.3.8.

a) Resuelve el problema de la situación inicial a partir del teorema de Tales. Compara tu resultado con el que antes obtuviste. ¿Tu respuesta fue correcta? ¿Qué método te parece más exacto? ______

______

______

b) ¿Cuál es en el croquis la longitud del segmento que separa los edificios 1 y 2?

______

c) ¿Cuál es la longitud del segmento entre el edificio 3 y las jardineras? ______

______

Resuelve y practica

1. Analiza la figura 3.3.9, donde las rectas horizontales son paralelas, y obtén la medida de los segmentos desconocidos. Justifica los resultados en tu cuaderno.

- $\overline{KN}$ = ____________
- $\overline{KP}$ = ____________
- $\overline{MP}$ = ____________
- $\overline{MI}$ = ____________
- $\overline{GL}$ = ____________
- $\overline{IL}$ = ____________

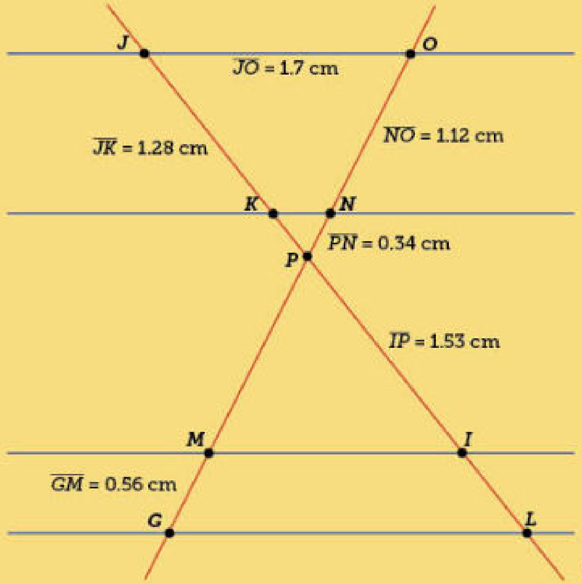


Fig. 3.3.9.

Observa y relaciona

Tales de Mileto

Tales de Mileto fue un filósofo griego que vivió alrededor del año 600 a. n. e. El teorema que enunció es el siguiente:

"Al trazar una recta paralela a uno de los lados de cualquier triángulo se obtiene otro triángulo semejante al primero." (Figura 3.3.10.)

El teorema que estudiaste en esta secuencia proviene del enunciado anterior, por lo que también se conoce como *teorema de Tales*.

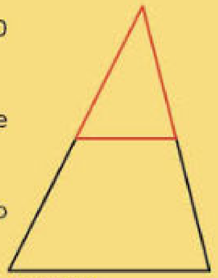


Fig. 3.3.10.

1. Resuelve en tu cuaderno el siguiente problema.

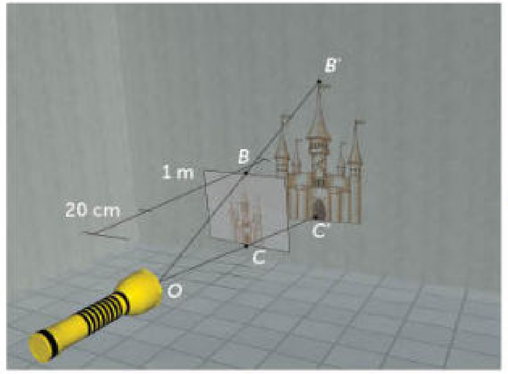
   Tales de Mileto utilizó una vara vertical para medir la altura de la gran pirámide de Guiza, en Egipto, cuya base cuadrada es de 230.36 m por lado.
   Supón que la vara medía 1 m de longitud, que su sombra era de 1.30 m y que la sombra de la pirámide, desde una esquina de su base, es de 75.387 m. ¿Cuál es la altura de la gran pirámide de Guiza?

4. Homotecia

Situación inicial

Proyección de una imagen

María, Joaquín y Cecilia presentarán una obra de teatro en su escuela. Para la escenificación necesitan dibujar un gran castillo en el telón de fondo, pero no cuentan con un modelo del tamaño requerido. Para resolver su problema dibujaron un castillo en una hoja de acetato y, con una lámpara, proyectaron la imagen en el telón. María colocó la lámpara a 20 cm del dibujo en dirección a la pared, mientras Joaquín lo sostenía a 1 m de la pared; así Cecilia pudo calcar la silueta del castillo proyectada en el fondo. La figura 3.4.1 es el esquema del procedimiento. Si el dibujo tiene 35 cm de alto, ¿cuál será la altura del castillo que calcó Cecilia?



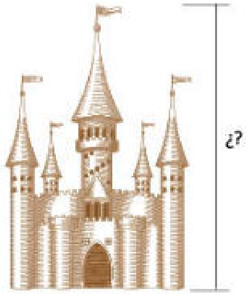


Fig. 3.4.1.

Analiza

1. En parejas, resuelvan el problema y anoten su procedimiento. ____________
2. En grupo, respondan lo siguiente.
   a) ¿Cómo son entre sí los triángulos *BOC* y *B'OC'* que se forman en la figura 3.4.1? Justifiquen su respuesta. ____________
   b) ¿El castillo de la hoja y el de la pared están a escala? Justifiquen su respuesta y, si es el caso, determinen el factor de escala entre ellos. ____________
   c) Compartan su respuesta y procedimiento en grupo. Verifiquen que sean correctos y, si es necesario, corríjanlos con apoyo de su profesor.

Explora y construye

Figuras homotéticas, centro de homotecia y razón de homotecia

1 En parejas, analicen las figuras 3.4.2 y 3.4.3; realicen y respondan lo que se pide.

- Tracen rectas que pasen por los vértices de un triángulo y los vértices correspondientes de su triángulo semejante.

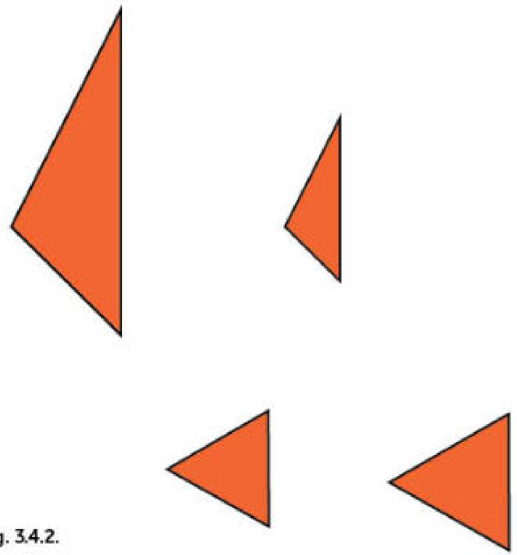


Fig. 3.4.2.

a) ¿Qué observan en las rectas que trazaron para cada par semejante? ______

______

- Unan con un segmento de recta cada vértice del cuadrilátero *ABCD* de la figura 3.4.3 con el punto *P*.

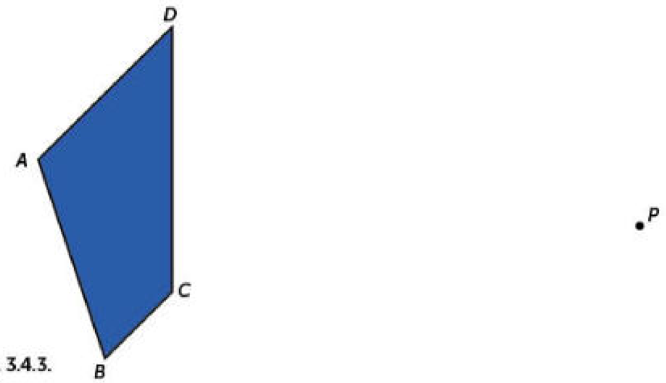


Fig. 3.4.3.

b) Localicen los puntos medios de los segmentos que trazaron, desígnenlos, respectivamente, *A'*, *B'*, *C'* y *D'* y construyan el cuadrilátero *A'B'C'D'*.

c) De acuerdo con sus ángulos, ¿cómo son entre sí los cuadriláteros *ABCD* y *A'B'C'D'*? ______

d) A partir de su respuesta anterior, escriban una conclusión acerca de las medidas de los lados de un cuadrilátero respecto del otro. ______

______

e) ¿Cuál es la relación entre las razones $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{A'P}}{\overline{AP}}$ y $\frac{\overline{B'P}}{\overline{BP}}$? ______

f) ¿La relación anterior se conserva para los demás vértices del cuadrilátero? ¿Por qué? ______

______

2 En grupo, compartan y comenten sus conclusiones. Verifiquen que sean correctas con apoyo de su profesor.

Una figura es *homotética* a otra si son semejantes y las rectas que unen los vértices correspondientes coinciden en un solo punto, llamado *centro de homotecia*.

Por ejemplo, el cuadrilátero *A'B'C'D'* de la figura 3.4.3 es homotético al *ABCD*, y el punto *P* es el centro de homotecia.

Además, la razón $\frac{\overline{M'P}}{\overline{MP}}$ se conoce como la *razón de homotecia*, donde *M* es un punto cualquiera de una figura; *M'*, el punto correspondiente de la figura homotética semejante, y *P*, el centro de homotecia.

Es decir, la razón de homotecia es la *escala* a la que está una figura respecto a su homotecia.

3 Responde con base en la figura 3.4.3.

a) ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia del cuadrilátero *A'B'C'D'* respecto al *ABCD*? ______

b) Si el cuadrilátero *A'B'C'D'* se considera la figura original, ¿se puede afirmar que *ABCD* es homotético a *A'B'C'D'*? ¿Por qué? ______

______

c) Si tu respuesta es afirmativa, indica la razón de homotecia de *ABCD* respecto a *A'B'C'D'*. ______

4 Compara tus respuestas y argumentos con los de un compañero y, con apoyo de su profesor, verifiquen que sean correctos.

5 En parejas, realicen lo que se indica sobre la figura 3.4.4 de la siguiente página y contesten.

- Tracen una semirrecta con extremo en *O* que pase por el punto *V*.
- Sitúen un punto *V'* sobre la semirrecta, de modo que la longitud de $\overline{VV'}$ sea el doble que la de $\overline{OV}$; prolonguen la semirrecta si es necesario.

- Repitan los pasos anteriores para los demás vértices del hexágono y construyan el polígono homotético a *UVWXYZ*.

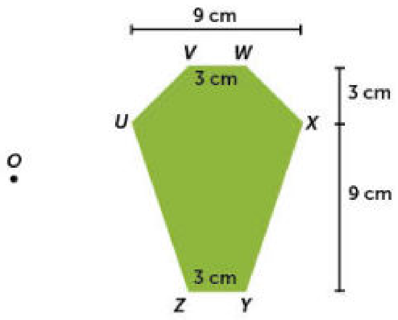


Fig. 3.4.4.

a) Sin hacer cálculos, indiquen la razón de homotecia. Justifiquen su respuesta.

b) Calculen el perímetro de ambos polígonos y compárenlos. ¿Cómo son entre sí?

c) ¿Su conclusión anterior es la misma para las áreas que ocupan las figuras? Justifiquen su respuesta.

d) Compartan y comparen sus respuestas con otra pareja. Comenten qué características se conservan y cuáles cambian entre una figura y su homotética. Anótenlas a continuación.

Busca en...

www.edutics.mx/4uT donde podrás variar los parámetros de una construcción homotética y observar cómo se modifican las figuras geométricas. (Consulta: 20 de enero de 2019).

6 En grupo, comparen sus conclusiones. Valídenlas con ayuda de su profesor.

Razón de homotecia negativa y composición de figuras homotéticas

1 En parejas, analicen la figura 3.4.5. Realicen y contesten lo que se indica.

- Tracen una semirrecta con extremo en *A* que cruce por *Q*.
- Sitúen un punto *A′* sobre la semirrecta en el lado opuesto a donde se encuentra *A*, de modo que $\overline{AQ} = \overline{QA'}$.
- Obtengan los puntos *B′* y *C′* para formar, junto con *A′*, el triángulo homotético a *ABC*, con *Q* como centro de homotecia.

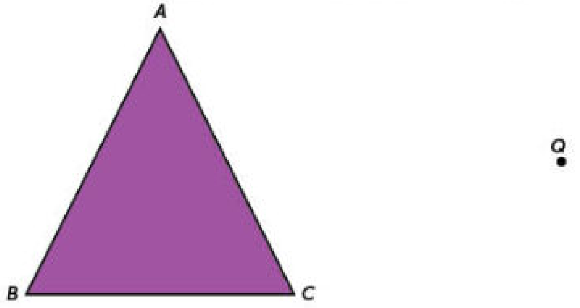


Fig. 3.4.5.

a) ¿Cómo cambia la posición de un triángulo respecto al otro?

b) Consideren el segmento $\overline{AA'}$ como parte de una recta numérica cuyo origen es el centro de homotecia, de manera que la posición de *A* respecto al origen se encuentre en la parte positiva de la recta, y la de *A′*, en la parte negativa. Con base en estas posiciones determinen la razón de homotecia.

Toma nota

Localiza el término "figuras homotéticas" en el glosario (págs. 256-258); con tus propias palabras escribe su definición y un ejemplo.

c) Además de semejantes, ¿cómo son entre sí los triángulos *ABC* y *A′B′C′*? ¿Por qué?

d) ¿Con qué otra transformación obtendrían el triángulo *A′B′C′* a partir del triángulo *ABC*? Justifiquen su respuesta.

e) Anoten las características que se conservan y las que cambian entre dos figuras homotéticas cuya razón de homotecia es -1.

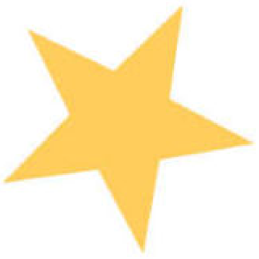


Fig. 3.4.6.

2 Construyan en sus cuadernos una figura homotética a la de la figura 3.4.6 con razón de homotecia -3, y otra con razón de homotecia igual a $-\frac{1}{4}$.

3 Compartan sus respuestas con las de otras dos parejas. Discutan qué representa gráficamente una razón de homotecia negativa.

4 En grupo, lean lo siguiente y contesten en su cuaderno.

La figura 3.4.7 muestra una composición de homotecias: un cuadrilátero (*BCDE*) y otros dos homotéticos a él (*B'C'D'E'* y *B''C''D''E''*). Algunas de las distancias son $\overline{OC} = 9$ cm, $\overline{OC'} = 5$ cm, $\overline{OD'} = 5.8$ cm, $\overline{D''D'} = 2.8$ cm.

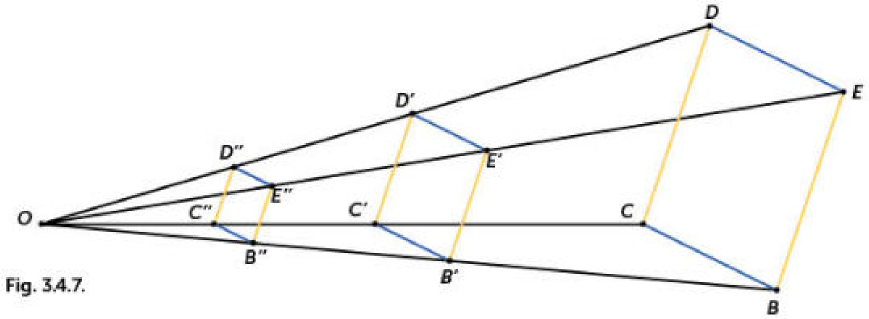


Fig. 3.4.7.

a) ¿Cuál es la razón de homotecia entre cada par de cuadriláteros? Justifiquen su respuesta.
b) ¿Cuál es la relación entre las razones que determinaron en el inciso anterior?

5 Compartan sus respuestas y conclusiones con las de otra pareja. Discutan cuál es la relación entre las razones de homotecia en una composición de homotecias.

Reflexiona

1. En grupo, consideren dos figuras homotéticas y analicen qué significa que la razón de homotecia entre ellas sea igual a cero.

Regresa y revisa

1 Regresa al problema de la situación inicial y contesta en tu cuaderno.
a) ¿El castillo de la hoja y el de la pared son homotéticos? Justifica tu respuesta, y si tu respuesta es afirmativa, determina el centro y la razón de homotecia.
b) Si la hoja está a 1 m de la pared, ¿a qué distancia de la pared habría que colocar la lámpara para que la altura del castillo fuera de 1.4 m?

Resuelve y practica

1. Determina si los polígonos P_1 y P_2 de la figura 3.4.8 son homotéticos con centro de homotecia en *O*. Justifica tu respuesta y valida tus resultados en grupo.
2. Explica el significado de que la razón de homotecia entre dos figuras sea:
   a) Positiva.
   b) Negativa.
   c) Un número fraccionario menor que 1, pero mayor que 0.

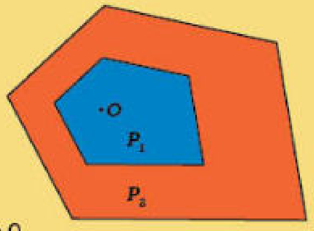


Fig. 3.4.8.

5. Otra forma de representar relaciones cuadráticas

Situación inicial

La venta de mochilas

Un comerciante sabe que el número de mochilas que vende varía de acuerdo con su precio: si éste es de $60.00 cada una, vende 200 mochilas en una semana; por cada peso que disminuye el precio, vende cinco mochilas más, y por cada peso que lo aumenta, vende cinco mochilas menos. ¿Cuánto debe aumentar o disminuir el precio de las mochilas para obtener el mayor ingreso posible?

Analiza

1. En parejas, realicen y respondan lo siguiente.
   a) En cursos anteriores aprendieron que una situción que implica un problema matemático puede representarse de distintas maneras. ¿Emplearon alguna de ellas en el problema? ¿Cuál? ¿Por qué eligieron este tipo de representación? ____________
   b) ¿Sus compañeros de clase usaron otra representación? ¿Cuál? ¿Consideran que es válida? Expliquen su respuesta. ____________
   c) Expliquen cómo resolvieron el problema ____________
   d) Comparen sus respuestas con sus compañeros de grupo, ¿obtubieron los mismos resultados? ____________
   e) Comparen sus procedimientos, ¿consideran que son válidos? ¿Por qué? ____________
   f) Analicen: ¿un mismo problema puede tener distintas soluciones? ¿Distintos procedimientos pueden llevar al mismo resultado? Justifiquen su respuesta. ____________
2. En grupo, compartan y comparen sus respuestas. Analicen los errores que se presentaron y corríjanlos.

Explora y construye

Gráficas de relaciones cuadráticas

1 En parejas, realicen y respondan lo siguiente.

a) Completen la tabla 3.5.1, que muestra la variación entre la medida del lado de un cuadrado y su área.

Longitud del lado (cm)	0.5	1	1.5	2	2.5
Área (cm²)					

Tabla 3.5.1.

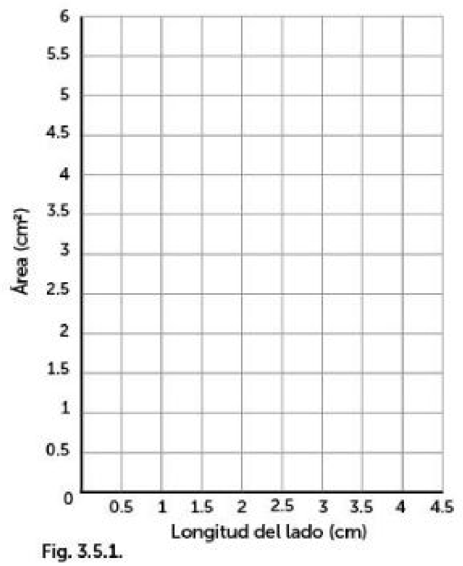


Fig. 3.5.1.

b) Sitúen las parejas ordenadas (longitud del lado, área) de la tabla en el plano cartesiano de la figura 3.5.1.

c) ¿Qué expresión algebraica relaciona la longitud del lado con el área del cuadrado? ____________________

d) A partir de los puntos que ubicaron en el plano, ¿qué forma tendrá la gráfica de la expresión anterior? Expliquen su respuesta. ____________________

____

e) Sitúen en el plano cartesiano otros puntos que correspondan a la expresión algebraica que determinaron y tracen la gráfica correspondiente.

2 Comparen sus respuestas y su gráfica con las de otra pareja. En grupo, verifiquen que sean correctas.

3 En equipos, lean y respondan lo siguiente.

En tu curso de Física estudiaste el concepto de energía cinética de un cuerpo, cuya fórmula es $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, donde E_c es la energía cinética medida en joules; m, la masa del cuerpo en kilogramos, y v, la velocidad medida en metros por segundo.

a) A partir de la fórmula anterior, y para un objeto de 1 kg, completen la tabla 3.5.2.

Velocidad (m/s)	2.5	2	1.5	1	0.5	0	−0.5	−1	−1.5	−2	−2.5
Energía cinética (J)	3.125										

Tabla 3.5.2.

b) ¿Qué significan las velocidades negativas? ____________________

____

____

c) Tracen en su cuaderno la gráfica que se obtiene con base en la tabla anterior. Si es necesario, obtengan más valores.

d) ¿Qué forma tiene la gráfica? ____________________

4 En grupo, comparen sus respuestas anteriores y comprueben que son correctas. Discutan qué tipo de expresiones algebraicas son las de las actividades 1 y 3 anteriores y cómo son sus respectivas gráficas. Validen sus conclusiones con ayuda de su profesor.

Las *relaciones cuadráticas* se representan en el plano cartesiano mediante *curvas*.

Análisis de gráficas de relaciones cuadráticas

1 En parejas, lean y contesten lo siguiente en su cuaderno.

La población de dos tipos de bacterias, A y B, evolucionan de acuerdo con las siguientes expresiones:

Bacteria A: $P = t^2 - 4t + 4$

Bacteria B: $P = -t^2 + 2t + 3$

donde t representa el tiempo medido en horas, y P, la población de bacterias en millones. El comportamiento de estas poblaciones se muestra en la figura 3.5.2.

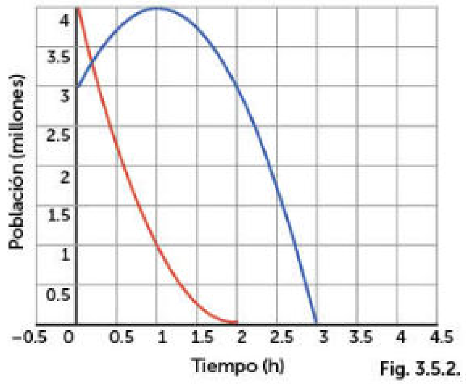


Fig. 3.5.2.

a) ¿Qué expresión corresponde a cada curva?
b) ¿Tendría sentido que las curvas se localizaran a la izquierda del eje de las ordenadas? Justifica tu respuesta.
c) ¿Por qué las curvas se detienen en el eje de las abscisas?
d) ¿Qué tipo de bacteria sobrevivió más tiempo? ¿Cómo lo saben?
e) ¿En qué momento la población de cada tipo de bacteria es mayor?
f) ¿Cuándo la población representada con la curva roja es igual a 1 millón?
g) ¿En qué momento la población representada con la curva azul es igual a 3 millones?

2 En grupo, compartan y comparen sus respuestas con otras parejas. Con ayuda de su profesor, discutan y corrijan los errores y analicen la utilidad de graficar una relación cuadrática en el plano cartesiano.

3 En parejas, analicen la siguiente situación y contesten.

Al modificar las medidas de los catetos del triángulo rectángulo de la figura 3.5.3, de modo que su suma siempre sea 7 cm, y calcular su área, se obtuvo la gráfica que ilustra la figura 3.5.4 de la página siguiente.

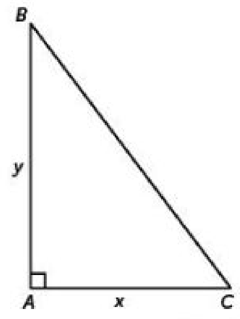


Fig. 3.5.3.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la variación del área del triángulo? Expliquen cómo la determinaron. ____________________

____

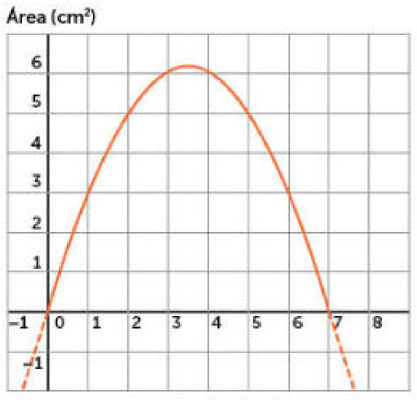


Fig. 3.5.4.

b) En comparación con la gráfica mostrada, ¿cómo sería la gráfica si en el eje horizontal se representara la medida de x? Expliquen su respuesta. ______

______

c) ¿En qué momento el área del triángulo es la mayor posible y cuándo es la mínima? ______

d) ¿Es posible que el triángulo tenga las medidas que corresponden a la intersección de la gráfica con el eje horizontal? Justifiquen su respuesta. ______

______

e) En el contexto de la situación, ¿tiene sentido que la gráfica continúe debajo del eje de las abscisas? ¿Por qué?

______

______

Busca en...

www.edutics.mx/4uq donde podrás observar las características de la grafica de una función cuadrática. (Consulta: 20 de enero de 2019).

f) ¿Cuál es el área del triángulo si y mide 6 cm? ______

g) ¿Cuáles son las medidas del triángulo si su área es de 3 cm²? ______

4 En grupo, comparen sus respuestas y, con apoyo de su profesor, verifiquen que sean correctas. Corrijan los errores que se presenten.

Ecuaciones cuadráticas a partir de una gráfica

1 En parejas, analicen la siguiente situación y contesten.

Víctor lanzó una pelota hacia arriba en dirección vertical y la atrapó al caer. La figura 3.5.5 muestra la altura de la pelota en términos del tiempo transcurrido.

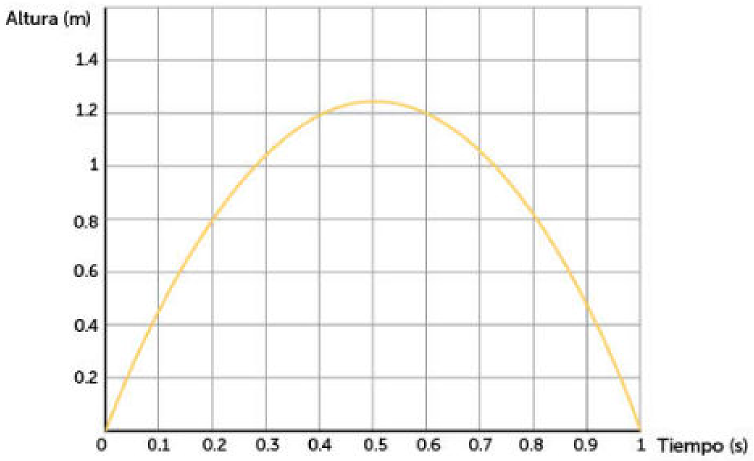


Fig. 3.5.5.

a) ¿Cuánto tiempo se mantuvo la pelota en el aire? ______

b) ¿En qué momento alcanzó la máxima altura? ______

c) ¿A qué altura estaba la pelota después de 0.8 s del lanzamiento? ______

d) ¿En qué momento alcanzó 1.2 m de altura? ______

e) ¿Cuál expresión algebraica corresponde a la gráfica del lanzamiento de la pelota? Justifiquen su elección. ______

- $h = -5t - 5t^2$
- $h = -5t + 5t^2$
- $h = 5t + 5t^2$
- $h = 5t - 5t^2$

f) Si Víctor no hubiera atrapado la pelota, ¿en qué momento hubiera tenido una altura de −1.2 m? ______

g) ¿En qué momento la pelota alcanzó una altura de 1 m? ¿Por qué? ______

______

2 En grupo, comenten sus respuestas. Verifiquen, con ayuda de su profesor, que sean correctas y corrijan los errores que se presenten.

Reflexiona

1. En parejas, realicen y respondan lo siguiente.
   a) Tracen en su cuaderno las gráficas de las expresiones $x^2 - 5x + 4$ y $x^2 - x + 5$.
   b) Resuelvan con la fórmula general las ecuaciones $x^2 - 5x + 4 = 0$ y $x^2 - x + 5 = 0$. Anoten el resultado. ______
   c) ¿Qué relación observan entre la intersección de las gráficas con el eje horizontal y las soluciones de las ecuaciones? ______

   ______
2. En grupo, comparen y comenten sus conclusiones. Verifiquen que sean correctas con ayuda de su profesor.

Regresa y revisa

1 Lee lo siguiente. Después realiza y responde lo que se pide en tu cuaderno.

Supón que el comerciante de la situación inicial támbien vende cada semana 400 playeras a $40.00 cada una, y que si disminuyera el precio en un peso, vendería siete playeras más, y por cada peso que aumentara, vendería siete playeras menos.

a) Traza la gráfica que representa el problema.
b) ¿Cuánto debe aumentar o disminuir el precio para que su ganancia semanal sea la máxima posible? Justifica tu respuesta.

2 En grupo, comparen sus respuestas. Discutan y corrijan los errores que se presenten.

6. Gráficas con secciones rectas y curvas

Situación inicial

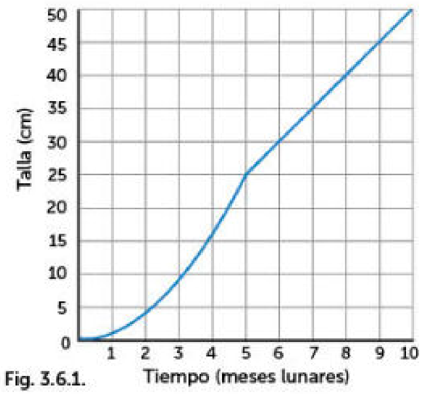


Fig. 3.6.1.

El desarrollo embrionario

La figura 3.6.1 muestra la talla promedio del ser humano durante su periodo de gestación; la gráfica se obtuvo mediante la regla de Haese, y el tiempo transcurrido se mide en meses lunares. Cada mes lunar dura 28 días aproximadamente. ¿Qué significa que la gráfica tenga dos secciones de diferente forma?

Analiza

1. En parejas, realicen y respondan en su cuaderno lo que se pide.
   - **a)** ¿En qué lapso el feto aumenta su talla con más rapidez?
   - **b)** ¿En qué lapso el crecimiento del feto es proporcional al tiempo? ¿En cuál no?
   - **c)** ¿Cuál es la talla aproximada del feto a los 4.5 meses lunares? ¿Y a los 6 meses lunares?
   - **d)** En grupo, comparen sus conclusiones y respuestas. Verifiquen su validez con apoyo de su profesor.

Explora y construye

Gráficas de segmentos rectos

1 En parejas, analicen la siguiente situación. Realicen y contesten en su cuaderno lo que se indica.

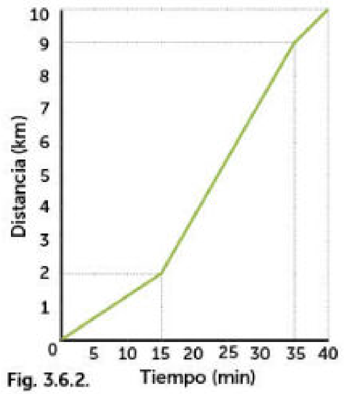


Fig. 3.6.2.

La figura 3.6.2 muestra la distancia que recorrió un atleta en su último entrenamiento en términos del tiempo de práctica.

a) ¿Cuánto duró el entrenamiento? ____________

b) ¿Qué distancia recorrió en total? ____________

c) Su instructor le pidió que dividiera su entrenamiento en tres etapas: trote de calentamiento, carrera y relajación, y que en cada una mantuviera una rapidez constante. Identifica estas etapas en la gráfica.

d) ¿Cuál fue la duración y cuál la distancia recorrida en cada etapa? ____________

e) ¿Cuál fue su rapidez en cada etapa? ____________

f) Si al finalizar la segunda etapa eran las 11:00 horas del día, ¿a qué hora inició el entrenamiento? ____________

2 En grupo, compartan y discutan sus respuestas. Analicen y corrijan los errores que se presenten.

3 En parejas, consideren la siguiente situación y contesten en su cuaderno. Argumenten sus respuestas.

La gráfica de la rapidez de un camión de carga en términos del tiempo de su trayecto se muestra en la figura 3.6.3. El registro inició cuando el vehículo pasó una caseta de cobro en la carretera y finalizó al llegar al lugar de entrega en la ciudad.

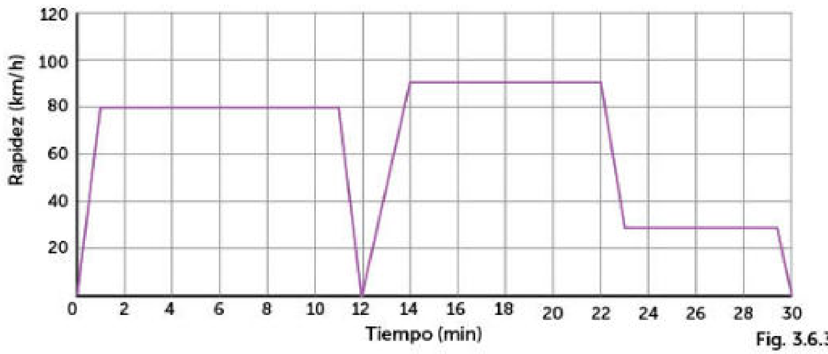


Fig. 3.6.3.

Busca en...
www.edutics.mx/4uc donde podrás observar las gráficas que modelan el llenado de recipientes de distintas formas. (Consulta: 20 de enero de 2019).

a) ¿Cuánto duró el trayecto?
b) ¿Cuál fue la rapidez máxima del camión y cuántos kilómetros recorrió con esa rapidez?
c) A lo largo del camino había otra caseta de cobro, ¿cuándo pasó por ella el camión?
d) ¿Cuántas veces en su recorrido el camión se desplazó con rapidez constante?
e) ¿Durante cuánto tiempo se desplazó el camión con rapidez constante?
f) ¿Cuándo se podría considerar que el camión entró a la ciudad según la gráfica?

4 En grupo, compartan sus respuestas y, con ayuda de su profesor, verifiquen que sean correctas. Discutan la utilidad de analizar una situación mediante la gráfica que la representa.

Gráficas rectas y curvas

1 En parejas, subrayen el texto que describe cada situación.

a) La gráfica de la figura 3.6.4 muestra el cambio en una población de bacterias en un laboratorio al aplicar un antibiótico.
   - La población de bacterias disminuyó a un ritmo acelerado, luego aumentó a un ritmo constante, continuó descendiendo de manera acelerada y finalmente aumentó en forma constante.

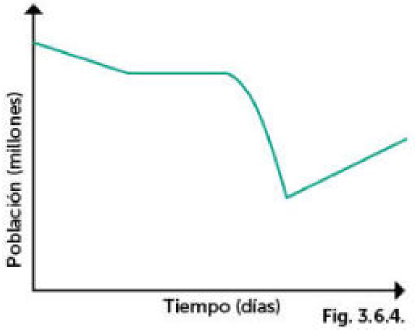


Fig. 3.6.4.

- La población disminuyó a un ritmo acelerado, después disminuyó lentamente, cayó de manera acelerada y al final aumentó a un ritmo constante.
- La población se redujo a ritmo constante, luego se mantuvo estable, continuó bajando de manera acelerada y por último aumentó constantemente.

b) La gráfica de la figura 3.6.5 representa la variación de la altura del vagón de una montaña rusa durante su recorrido.

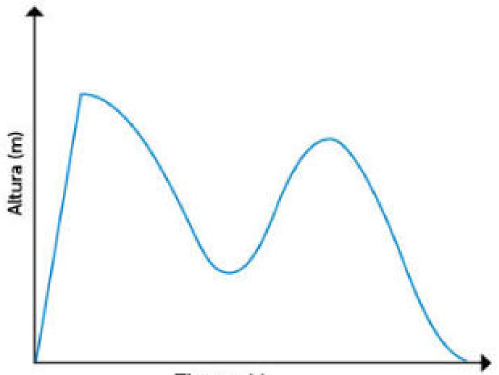


Fig. 3.6.5.

- La altura del vagón se modifica de manera acelerada: primero aumenta, luego disminuye, se incrementa otra vez y al final se reduce hasta el nivel del suelo.
- La altura del vagón primero aumenta en forma constante y luego de manera acelerada, disminuye; se incrementa de nuevo y baja otra vez hasta llegar al nivel del suelo.
- La altura del vagón se modifica constantemente: primero aumenta, luego disminuye, aumenta otra vez y por último se reduce hasta el nivel del suelo.
- La altura del vagón primero se incrementa y disminuye de manera constante, luego de manera acelerada, de nuevo aumenta y disminuye hasta llegar al nivel del suelo.

2 En grupo, comparen sus respuestas, argumenten su elección y con apoyo de su profesor corroboren que sean correctas. Analicen los errores que se presenten.

3 En parejas, relacionen cada gráfica con el texto que le corresponde. Justifiquen su elección en su cuaderno.

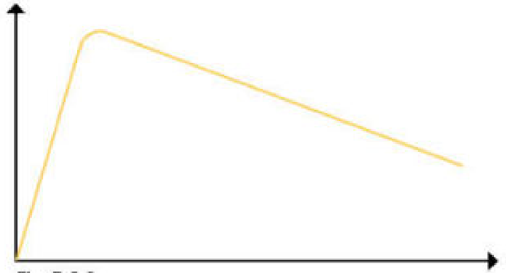


Fig. 3.6.6.

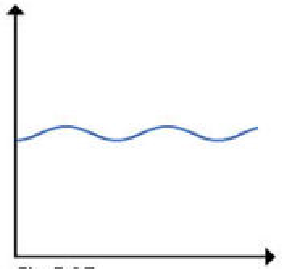


Fig. 3.6.7.

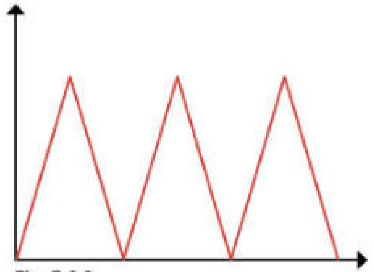


Fig. 3.6.8.

a) La rapidez de un péndulo en oscilación.
b) La carga de una batería al cargarse y usarse.
c) La posición de un objeto flotante al paso de las ondas del agua.

4 En grupo, analicen la gráfica de la figura 3.6.9, que muestra, en términos del tiempo transcurrido, la cantidad de levaduras presentes en un queso que se dejó fermentar. Describan el comportamiento de la cantidad de levaduras durante las primeras 13 horas de fermentación.

Fig. 3.6.9.

5 En parejas, analicen la forma de los recipientes de la figura 3.6.10, que se llenaron por la parte superior con flujos de agua constantes. Relacionen cada recipiente con la gráfica que representa la altura del agua a medida que cada uno se llenó. Justifiquen sus respuestas.

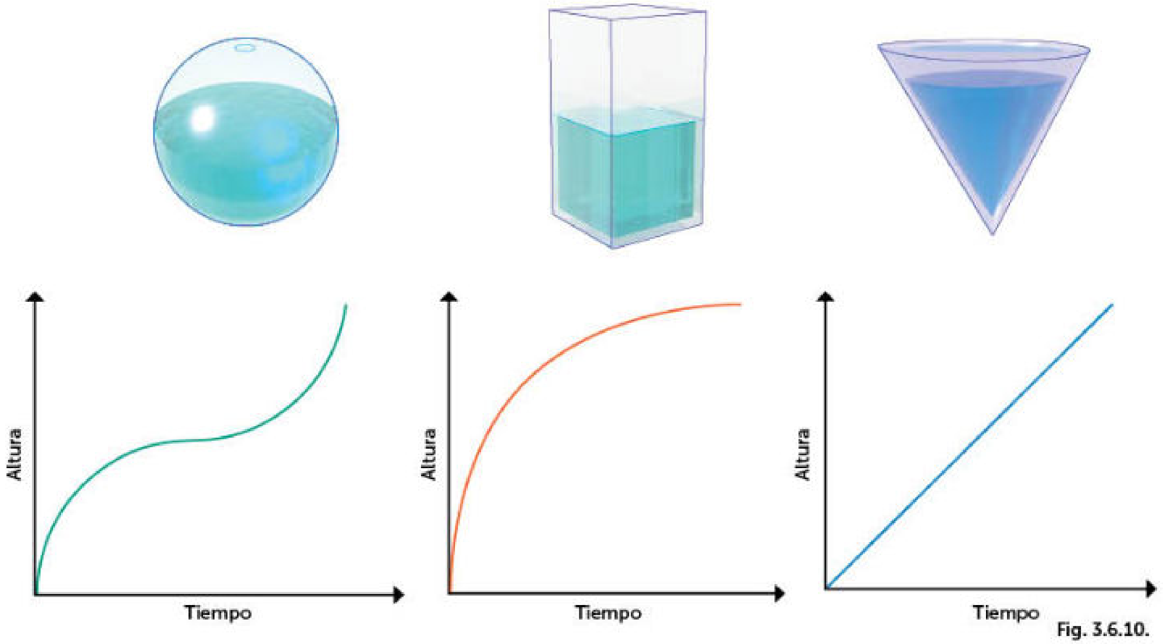


Fig. 3.6.10.

6 En grupo, comparen sus respuestas y justificaciones. Corrijan los errores que se presenten.

Fig. 3.6.11.

7 En parejas, analicen la forma del recipiente de la figura 3.6.11. Para cada uno de los siguientes casos tracen una gráfica en su cuaderno que relacione la altura del agua en el envase en términos del tiempo transcurrido.

a) El recipiente tenía la cantidad de agua que muestra la figura 3.6.11 y se vació por el fondo.
b) El recipiente estaba vacío, se tapó la salida inferior y se llenó por la parte superior con un flujo de agua constante.
c) El recipiente estaba lleno y se vació por el fondo; el flujo de agua también era constante.

8 En grupo, compartan y comparen sus gráficas. Expliquen los criterios que usaron para trazarlas.

Reflexiona

1. En equipos, regresen a la actividad 3 de la página 143 y, mediante las fórmulas de movimiento que aprendieron en el curso de Física, determinen la distancia total que recorrió el camión de carga.
2. En grupo, verifiquen su resultado con ayuda de su profesor y corríjanlo si es necesario.

Regresa y revisa

Lo que ya sabes

Para determinar la distancia recorrida por un cuerpo con aceleración constante se puede utilizar la fórmula $d = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, y para obtener la aceleración de un cuerpo se puede aplicar la fórmula $a = \frac{(v_f - v_0)}{t}$, donde: d es la distancia recorrida en metros; t es el tiempo transcurrido medido en segundos; a es la aceleración en metros por segundo al cuadrado; v_0 es la rapidez inicial en metros por segundo, y v_f es la rapidez final en metros por segundo.

1 En parejas, realicen lo que se indica.

a) Inventen de manera individual una situación que se pueda representar con una gráfica compuesta de secciones rectas y curvas.
b) Tracen la gráfica en el plano cartesiano de la figura 3.6.12. Recuerden indicar los valores que representen en cada eje.
c) Intercambien su propuesta con la de su compañero. Cada uno trace en su cuaderno la gráfica que corresponde a la situación de su compañero.
d) Comparen y verifiquen que las gráficas de uno y otro sean correctas.

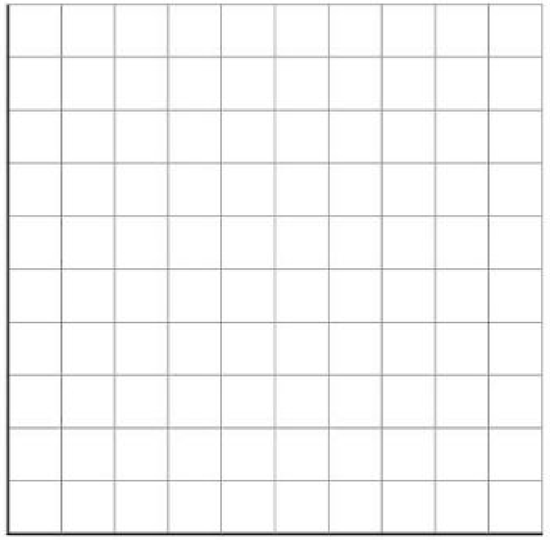


Fig. 3.6.12.

7. Probabilidad de eventos independientes

Situación inicial

Artículos electrónicos defectuosos

En una fábrica de artículos electrónicos se calcula que 1% de sus televisores y 0.5% de los reproductores DVD tienen algún defecto. Si una persona compra un televisor y un reproductor, ¿cuál es la probabilidad de que los dos productos estén defectuosos? ¿Por qué?

Analiza

1. En parejas, realicen y contesten lo siguiente.
   a) Comenten el procedimiento que siguieron para resolver el problema y anótenlo a continuación. ______
   b) Compartan su procedimiento con otra pareja. ¿Fueron similares? ¿Consideran que son correctos? ¿Por qué? ______
   c) ¿Cómo son entre sí los eventos "el televisor tiene un defecto" y "el reproductor DVD tiene un defecto"? Justifiquen su respuesta. ______
   d) ¿Existe una la relación entre la probabilidad de que ambos productos estén defectuosos y la probabilidad de que cada uno esté defectuoso? ¿Cuál? ______
2. En grupo, verifiquen sus procedimientos y respuestas con apoyo de su profesor.

Explora y construye

Eventos independientes

1 En equipos, analicen las siguientes situaciones.

a) Cada semana Gloria compra un boleto de lotería. Cuando su número no resulta ganador, cambia de número para el siguiente sorteo. Juan, en cambio, siempre participa con el mismo número. ¿Quién de los dos tiene más posibilidades de ganar? Justifiquen su respuesta.

______

b) En un sorteo se eligen 6 números entre el 1 y el 51. Si salen los números elegidos, se obtiene el primer premio. Arely seleccionó los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, y Jorge prefirió 8, 15, 21, 30, 40 y 50, pues piensa que tiene más probabilidades de ganar porque sus números están mejor distribuidos, y que es más difícil que salgan los primeros seis números. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

c) Karina quiere comprar un billete de lotería y puede elegir entre los dos números siguientes. ¿Con cuál tiene más posibilidades de ganar? Argumenten su respuesta.

Fig. 3.7.1.

2 En grupo, comenten sus respuestas y argumentos. Consideren el espacio muestral en cada situación anterior y respondan de nuevo las preguntas. ¿Sus respuestas son diferentes? Validen sus resultados con apoyo de su profesor.

3 En parejas, analicen, contesten y realicen lo que se solicita. En los incisos a) a f) indiquen los eventos simples que cumplen con cada condición.

En una urna hay cuatro pelotas idénticas numeradas del 1 al 4; se extrae una al azar, se anota su número y se regresa a la urna. Se extrae de nuevo una pelota y su número se suma al anterior.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor o igual a 7? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 5? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que los números de la pelota extraída sean iguales? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 2, 3 o 4? ______

e) ¿Y cuál es la probabilidad de que el número de la primera pelota sea 1 y el de la segunda 2? ______

f) ¿Cuál es la probabilidad de que los números sean impares y sumen 5? ______

g) Completen la tabla 3.7.1 para corroborar sus resultados.

		Resultado de la primera extracción			
		1	2	3	4
Resultado de la segunda extracción	1				
	2				
	3				
	4				

Tabla 3.7.1.

h) ¿Sus resultados fueron correctos? Si su respuesta es negativa, corrijan los errores y expliquen por qué sucedieron. ______

- ¿Cómo determinaron la probabilidad del evento del inciso d)? ¿Cuál fue su procedimiento? ______
- ¿Cómo calcularían la probabilidad del evento del inciso e) considerando sus eventos por separado? ______

4 En un laboratorio se observa el comportamiento de algunos animales que normalmente viven en grupos, con la intención de crear modelos que se puedan aplicar en la conducta social humana. En un experimento se coloca un ratón en la celda "Inicio" de un laberinto como el de la figura 3.7.2; la probabilidad de que el ratón se desplace a la derecha o a la izquierda en cada bifurcación es de 50%. ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón llegue a la celda B?

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón elija la derecha en la primera bifurcación? Expresa el resultado con número decimal. ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que elija ir a la izquierda en la segunda bifurcación? ______

c) ¿Qué relación numérica observan entre las probabilidades de que el ratón llegue a la celda B y las probabilidades de que elija una ruta en cada bifurcación? ______

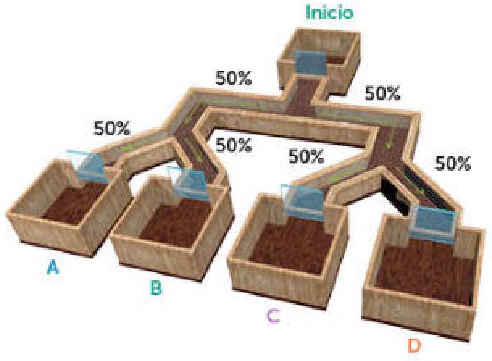


Fig. 3.7.2.

5 En equipos, analicen la siguiente situación; realicen y respondan en su cuaderno lo que se indica.

Fig. 3.7.3.

Hay dos sacos con pelotas de colores, como ilustra la figura 3.7.3. Se saca al azar una pelota del saco 1 y una del 2.

a) Con los eventos posibles, completen el diagrama de árbol de la figura 3.7.4 en su cuaderno; tracen las ramas faltantes y en cada una anoten la probabilidad de ocurrencia de los eventos. Sigan el ejemplo.

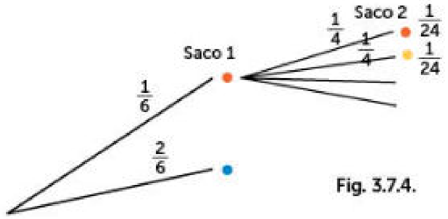


Fig. 3.7.4.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 pelotas rojas? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pelota azul de la primera bolsa y una verde de la segunda? ____________

d) ¿Si de la primera bolsa se obtiene una pelota verde, cambia la probabilidad de obtener una verde de la segunda bolsa? ¿Por qué? ____________

e) Tomando como eventos simples a los resultados de cada extracción y como compuestos a los eventos que consideral el resultado de ambas extracciones, ¿cómo se relaciona la probabilidad de cada evento compuesto en relación con la probabilidad de los eventos simples? Respondan en sus cuadernos.

6 Analicen la siguiente situación.

Para este experimento sólo considera el saco 1 de la figura 3.7.3. Se extrae una pelota al azar y se registra su color; sin regresarla se extrae otra pelota y se registra su color. Ambas pelotas se devuelven a la bolsa.

a) En su cuaderno elaboren el diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades del experimento. En cada rama anoten la probabilidad de los eventos simples y la probabilidad de los eventos compuestos.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos pelotas azules? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota amarilla y una roja? ____________

d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pelota morada en la primera extracción y una azul en la segunda? ____________

e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos pelotas rojas? ____________

f) ¿Obtener una pelota de cualquier color en la primera extracción afecta la probabilidad de sacar una de otro color en la segunda extracción? ¿Por qué?

____

7 En grupo, comparen sus respuestas. Discutan los errores y corríjanlos con apoyo de su profesor.

Dos eventos son *independientes* si la probabilidad de ocurrencia de uno no afecta la del otro; por el contrario, dos eventos son *dependientes* si al suceder uno, se modifica la probabilidad del otro.

La probabilidad de ocurrencia de un evento compuesto de dos eventos independientes es igual al producto de las probabilidades de ocurrencia de los eventos que lo componen; es decir, si A y B son eventos independientes, entonces $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$, donde $(A \text{ y } B)$ es el evento compuesto de A y B. Esta igualdad recibe el nombre de *regla del producto*.

La probabilidad de que ocurra un evento compuesto por dos eventos dependientes es $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B|A)$, donde $P(B|A)$ significa la probabilidad de que ocurra B una vez que ha sucedido A.

Reflexiona

1. Retoma el problema f) de la página 149.
   a) ¿Cuáles son los eventos simples que lo forman? ____________
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que cada evento simple ocurra por separado? ____________
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento compuesto? ____________
   d) ¿En este caso se aplica la regla del producto? ____________
   e) ¿Los eventos que forman el evento compuesto son dependientes o independientes? ____________
2. En grupo, escriban una conclusión sobre la relación entre la regla del producto y el que los eventos involucrados sean o no independientes.

Toma nota

Localiza el término "regla del producto" en el glosario (págs. 256-258); explícalo con tus propias palabras y escribe un ejemplo.

Regresa y revisa

1 En parejas, retomen el problema inicial y resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas. Justifiquen sus respuestas.
a) Si una persona compra dos televisores, ¿cuál es la probabilidad de que ambos estén defectuosos?
b) Si una persona compra dos reproductores DVD, ¿cuál es la probabilidad de que ambos estén defectuosos?

2 En la actividad 1 de la página 147 señala qué eventos son dependientes y cuáles independientes. Justifica tu respuesta.

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Como estudiaron en la secuencia 4 de este bloque, al aplicar las propiedades de la homotecia es posible generar figuras semejantes, a escala o en distinta posición a partir de una figura original.

1 En parejas, reúnan el siguiente material:

- Una hoja de foami, una hoja de papel tamaño carta, una cartulina con el doble de largo y el doble de ancho de la hoja de papel, estambre, tachuelas (chinchetas), cinta adhesiva, tijeras, lápiz, marcadores de colores y una figura o imagen de su preferencia (puede ser el recorte de una revista, o pueden imprimir una desde una computadora).

2 El procedimiento para obtener las figuras homotéticas es el siguiente:

- ▸ Peguen la figura o imagen en la hoja de papel (o imprímanla en ese tamaño) y colóquenla sobre la hoja de foami. Fijen ambas hojas con cinta adhesiva sobre una superficie lisa.
- ▸ Coloquen la cartulina al lado derecho de la hoja de papel, de manera que sus bases coincidan sobre la misma línea. Sujeten la cartulina sobre la superficie con cinta adhesiva.
- ▸ Extiendan la línea base a partir de la esquina inferior izquierda de la hoja de papel y marquen el centro de homotecia a una distancia equivalente al largo de la hoja, como indica la figura 3.A.1. Para este caso, la razón de homotecia será de 2, considerando el tamaño de la hoja y de la cartulina.

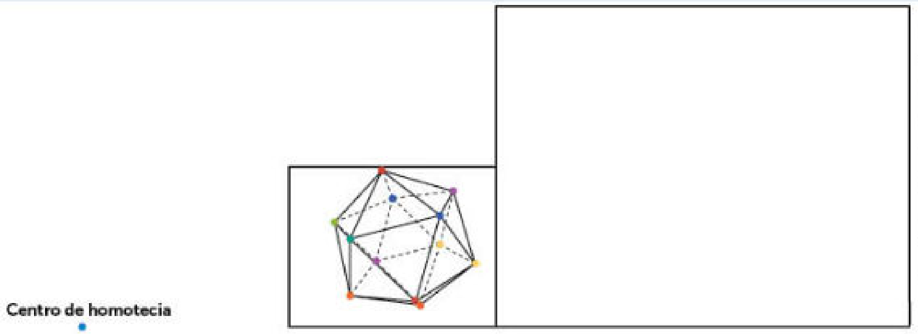


Fig. 3.A.1.

- ▸ Coloquen varias tachuelas en puntos estratégicos de la imagen; el foami les permitirá clavarlas.
- ▸ Corten un pedazo de estambre que abarque desde el punto de homotecia hasta la esquina superior derecha de la cartulina. Peguen un extremo del pedazo de estambre sobre el punto de homotecia y extiéndanlo firmemente hasta una de las tachuelas que hay sobre la imagen. Giren el hilo sobre la tachuela, una sola vez, y dirijan el otro extremo del hilo hasta el centro de homotecia; corten el exceso si es necesario. Con esto lograrán que la medida del hilo sea de dos veces la distancia del centro de homotecia a la tachuela.

Aplica las matemáticas

- ▸ Extiendan el hilo con firmeza para que quede recto y, sin perder su medida y pasando por la tachuela, marquen el punto hasta el que llegue en la cartulina.
- ▸ Hagan lo mismo con cada punto como se muestra en la figura 3.A.2. Seleccionen más puntos si lo consideran necesario.
- ▸ Finalmente, quiten los hilos y, siguiendo los puntos guía que marcaron, completen su figura homotética (figura 3.A.3).

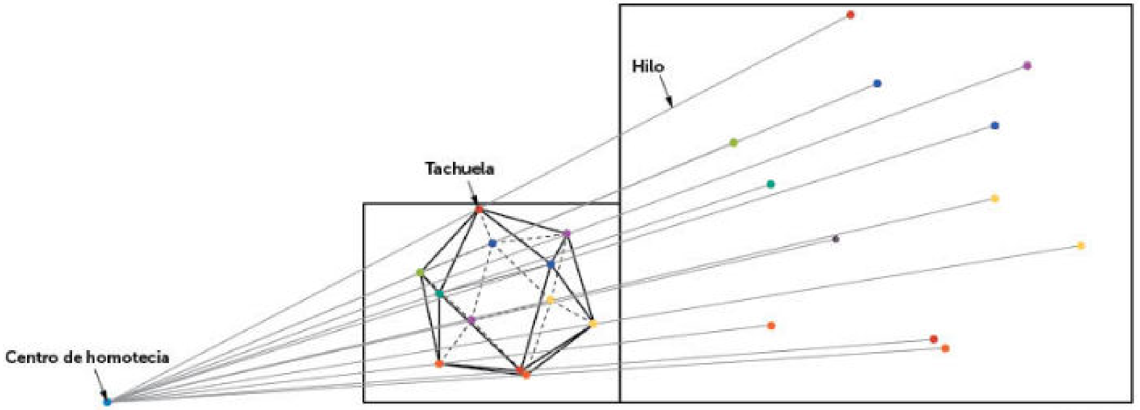


Fig. 3.A.2.

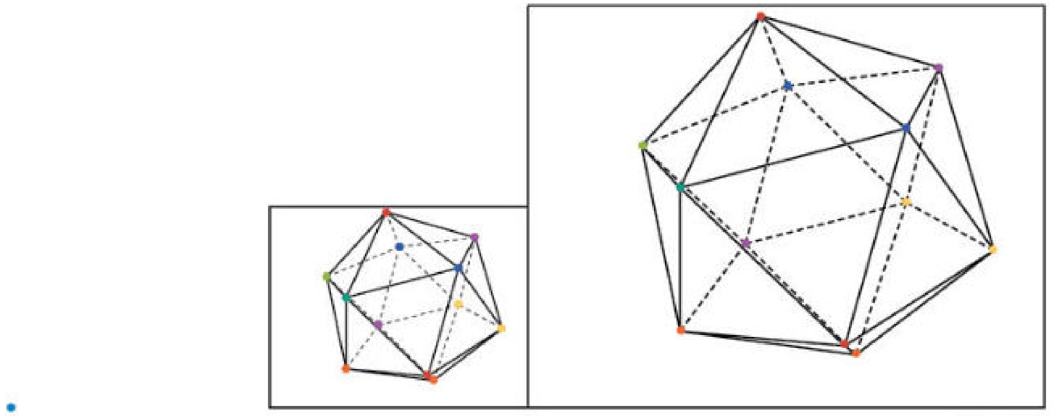


Fig. 3.A.3.

3 Sigan el mismo procedimiento, pero ahora con una imagen sobre media hoja tamaño carta; reprodúzcanla en una razón de homotecia de 3. Respondan lo siguiente.

a) ¿Qué medidas deberá tener la cartulina?
b) ¿A qué distancia debe estar el punto inferior de la cartulina del centro de homotecia?
c) ¿Cómo lograrán que el trozo de estambre mida el triple desde el centro de homotecia hasta una tachuela?

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan diferentes situaciones

En esta sección usarás una hoja de cálculo para construir gráficas que representen las situaciones que se plantean a continuación.

1 Cerca de la casa de Mario hay un parque al que va con frecuencia. En una ocasión se dirigió de su casa al parque: en los primeros 5 min recorrió 100 m y en los siguientes 5 min avanzó el doble de distancia y llegó a su destino; se sentó en una banca durante 15 min y luego regresó a casa, a la que llegó en 14 min.

- Representa mediante una gráfica el recorrido de Mario considerando el tiempo y la distancia que recorrió; incluye el tiempo de descanso. Para ello abre una hoja de cálculo y elabora una tabla con los datos del tiempo y la distancia que Mario recorre.
- En las celdas A y B de la primera fila escribe: *Tiempo (min)* y *Distancia (m)*, respectivamente, y en las celdas C y D: *Tiempo transcurrido (min)* y *Distancia recorrida (m)*, como se muestra en la figura 3.H.1. Los dos últimos parámetros representan la suma del tiempo transcurrido y la distancia que Mario recorrió en cada tiempo.
- Al escribir los títulos anteriores observarás que en las celdas no hay espacio suficiente para mostrarlos. Para ajustar la altura de las celdas, selecciona las celdas de los títulos y en el menú de *Inicio* elige *Ajustar texto*, que se encuentra en las opciones de *Alineación*, como se ilustra en la figura 3.H.1.

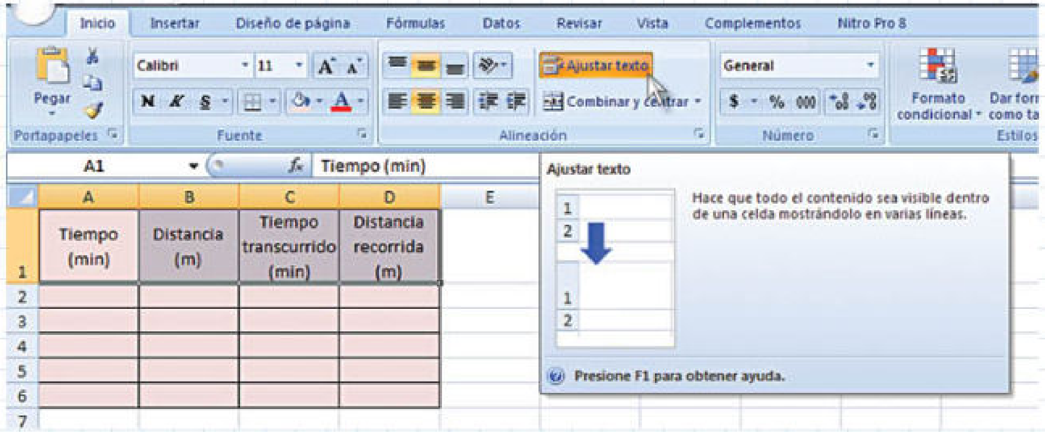


Fig. 3.H.1.

- Para completar los datos de la tabla, lee con mucha atención la información del recorrido de Mario. Comienza los datos con valores de tiempo y distancia cero para que tu gráfica inicie desde el origen de coordenadas.

- Para insertar la gráfica, primero selecciona los datos, que en este caso son los correspondientes a las columnas *C2:C6* y *D2:D6*.
- Inserta una gráfica de dispersión: en el menú *Insertar* da clic en la opción de *Dispersión* y elige *Dispersión con líneas rectas* (figura 3.H.2.). Obtendrás una gráfica similar a la de la figura 3.H.3., en la que el eje horizontal representa el tiempo acumulado y el eje vertical, la distancia acumulada.

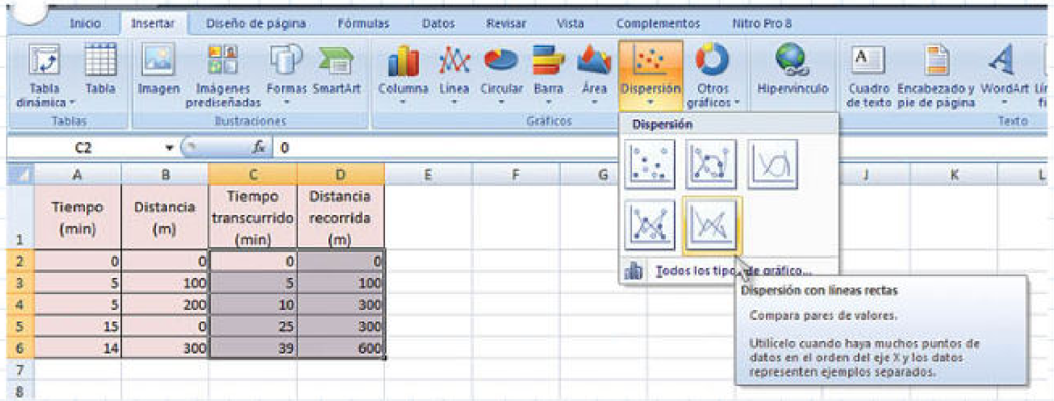


Fig. 3.H.2.

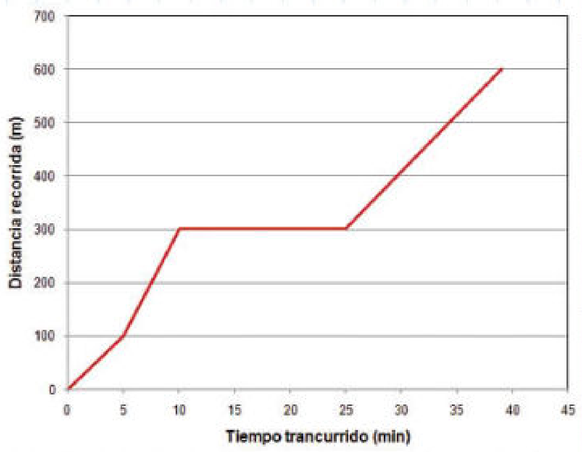


Fig. 3.H.3.

a) Observa la gráfica que obtuviste y a partir de ella responde.
- ¿Cuánto tiempo estuvo Mario fuera de casa?
- ¿Qué distancia recorrió en su paseo?
- ¿Qué hacía en el minuto 20 después de salir de su casa?
- ¿Y en el minuto 28?

2 Lee la siguiente situación y haz lo que se indica.
Para observar gráficamente el tiempo que un volumen determinado de agua requiere para alcanzar el punto de ebullición, Karla vertió 200 mL de agua en un recipiente de aluminio que colocó sobre la estufa apagada y midió su temperatura con un termómetro, el cual registró 20 °C. Este dato correspondió al tiempo cero, es decir, al momento en el que inició sus mediciones. Después de 3 min encendió la estufa y midió el incremento de temperatura en diferentes tiempos: al minuto 4 registró 22 °C; al minuto 5, 28 °C, y al minuto seis, 38 °C. Karla observó que la temperatura siguió aumentando del mismo modo hasta alcanzar los 92 °C en el minuto 9.

a) En una hoja de cálculo construye una tabla con los datos que obtuvo Karla, en cuanto al incremento de temperatura (°C) en relación con el tiempo transcurrido (min), y haz la gráfica correspondiente. Considera el tiempo desde el minuto 0 hasta el minuto 10.

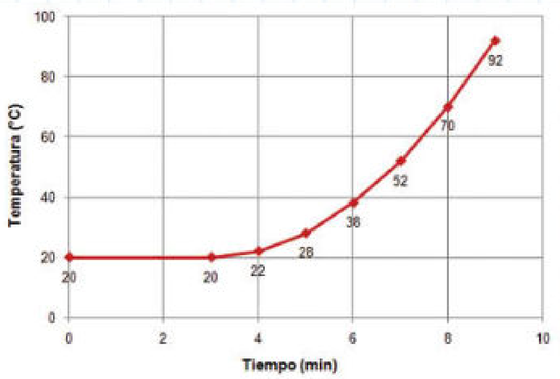


Fig. 3.H.4.

b) Responde lo siguiente.

- ¿Tu gráfica se parece a la que se muestra en la figura 3.H.4?
- Si tu respuesta es afirmativa, tu procedimiento para construirla fue el adecuado. Si no es así, lee nuevamente el problema y corrige el procedimiento.
- ¿En qué cambiaría tu gráfica si consideras que la temperatura de ebullición del agua a nivel del mar es de 100 °C y que durante el cambio de fase la temperatura no aumenta?

Para corroborar tu respuesta a esta última pregunta completa los datos hasta el minuto 12 y elabora una nueva gráfica.

- ¿Cuántas secciones rectas tiene tu gráfica? Interpreta el significado de las rectas desde el punto de vista físico.

3 Abre una nueva hoja de cálculo, elabora una tabla con datos aproximados para la siguiente situación y construye la gráfica correspondiente.

Un ciclista inició su recorrido acelerando lo más que pudo durante 5 min; los siguientes 10 min mantuvo una rapidez constante, después volvió a acelerar por 3 min más y finalmente dejó de pedalear hasta que se detuvo.

a) ¿A cuál de las siguientes representaciones gráficas se parece la gráfica que construiste?

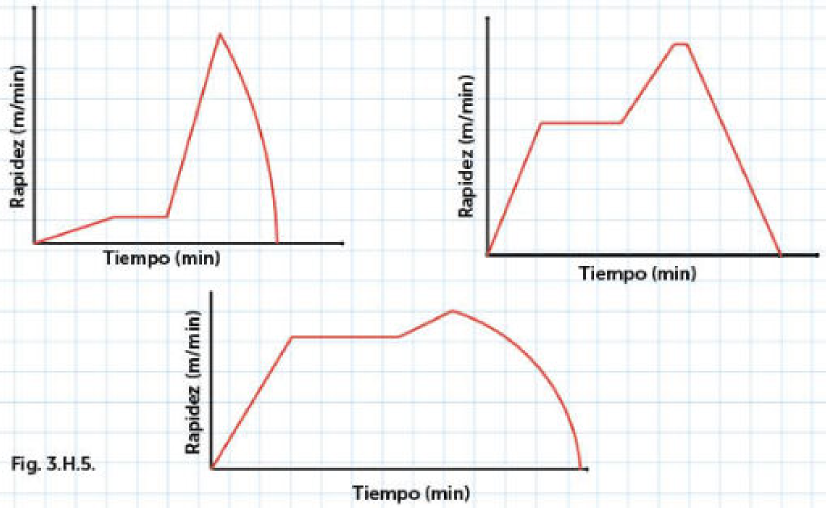


Fig. 3.H.5.

1 Lee cada uno de los siguientes enunciados.

2 Señala si es falso (F) o verdadero (V).

3 Explica cómo verificarías tu respuesta.

Enunciado	F	V	Propuesta de verificación
a) Si la ecuación $x^2 + 2x + ? = 0$ tiene una única solución, entonces el término independiente es 5.			
b) Si un triángulo con medidas 10 cm, 11 cm y 12 cm es semejante a otro cuyos lados miden 4 cm, 4.4 cm y p cm, entonces p = 4.6 cm.			
c) Cualquier triángulo se puede dividir en cuatro triángulos semejantes al original si se unen los puntos medios de sus lados.			
d) Si la razón de homotecia entre un triángulo $A'B'C'$ y su homotético, ABC, es 2, entonces el área de uno es el doble que la del otro.			
e) Si la gráfica de una ecuación cuadrática pasa por el origen del plano cartesiano, entonces se trata de una relación de proporcionalidad directa.			
f) Si un objeto se desplaza de manera acelerada, luego se mueve con rapidez constante y al final aumenta su rapidez aceleradamente, entonces su representación gráfica respecto al tiempo se compone de dos secciones rectas y una curva.			
g) De una baraja inglesa, que contiene 52 cartas distintas, se extrae una al azar y se regresa al mazo. La probabilidad de obtener tres veces seguidas la misma carta es $\frac{3}{52}$.			

4 En la página 159 revisa qué enunciados son falsos y cuáles verdaderos. Consulta en tu libro los temas de las respuestas erróneas; si es necesario, replantea tus propuestas de verificación y aplícalas.

1 Para construir la tapa de una caja se cortan cuatro cuadrados de a unidades de lado en cada esquina de un rectángulo, como ilustra la figura. El rectángulo tiene $10a$ cm de largo, que es el doble de la medida del ancho. Si el área verde es de 414 cm², ¿cuánto mide el ancho del rectángulo inicial?

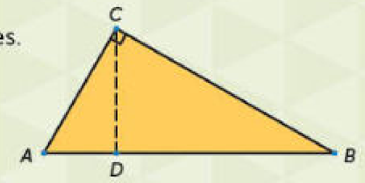
a) 5 cm
b) 30 cm
c) 15 cm
d) 9 cm

2 Al aumentar una unidad el lado de un cuadrado y disminuir dos unidades otro de sus lados se forma un rectángulo de cuatro unidades cuadradas de área. ¿Cuál es el área del cuadrado?

a) -9 u²
b) 9 u²
c) -4 u²
d) 4 u²

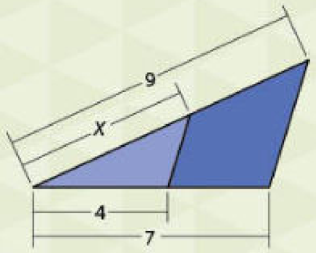
3 El triángulo *ABC* es rectángulo y $\overline{CD}$, una de sus alturas. Los triángulos *ABC* y *DBC* son semejantes. ¿Cuál de las siguientes propiedades cumplen los triángulos *ADC* y *DBC*?

a) Los ángulos de los dos triángulos son iguales.
b) Sus perímetros son iguales.
c) Sus áreas son iguales.
d) Ninguna de las anteriores.



4 ¿Con cuál de las siguientes expresiones no es posible calcular la longitud del segmento x?

a) $\frac{9}{7} = \frac{x}{4}$
b) $\frac{x}{9} = \frac{4}{7}$
c) $x = \frac{36}{7}$
d) $\frac{x}{7} = \frac{9}{4}$



5 Cada pregunta de un examen tiene cuatro posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de responder al azar cuatro preguntas y que las cuatro sean incorrectas?

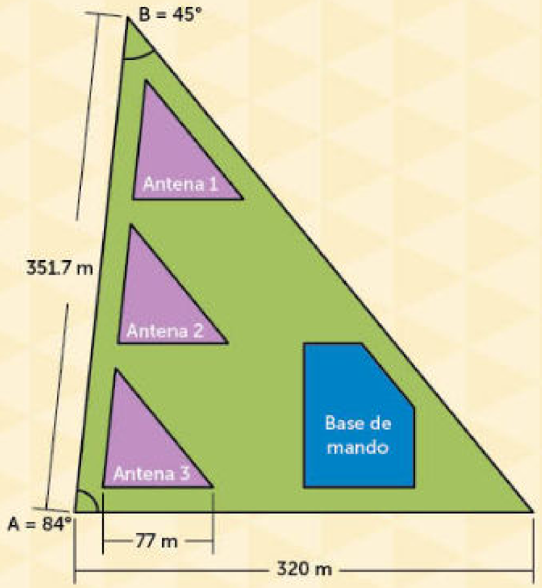
a) 0.3164
b) 0.996
c) 0.0039
d) 0.25

1 Un objeto se arroja verticalmente por un acantilado con una velocidad inicial de 20 m/s. Considera la fórmula de un objeto en caída libre, $h = V_0t + \frac{1}{2}gt^2$, donde: h es la altura; V_0, la velocidad inicial; t, el tiempo transcurrido, y g, la aceleración gravitacional, que vale aproximadamente 10 m/s².

a) Si el acantilado mide 400 m de profundidad, ¿en qué momento el objeto se encontrará a una altura de 300 m respecto al suelo?

b) ¿En cuánto tiempo habrá recorrido 50 m?

2 En una estación de telecomunicaciones se ubican tres antenas de transmisión y una base de mando. Las superficies que ocupan las antenas son congruentes entre sí, además, la forma del terreno de la estación es semejante a las superficies que ocupan las antenas.



Si la estación tiene un perímetro de 1 038.5 m, ¿cuánta malla se necesita al menos para rodear los terrenos que ocupan las tres antenas?

Respuestas de la autoevaluación de la página 157. Enunciados falsos: a), b), d), e), f), g); enunciado verdadero: c).

A

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

Bloque 4

C

Contenidos

Sentido numérico y pensamiento algebraico

- Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Forma, espacio y medida

- Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.
- Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.
- Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Manejo de la información

- Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.
- Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

La armonía de los sólidos de revolución y de las secciones cónicas está presente en distintas manifestaciones artísticas, un ejemplo es la arquitectura.

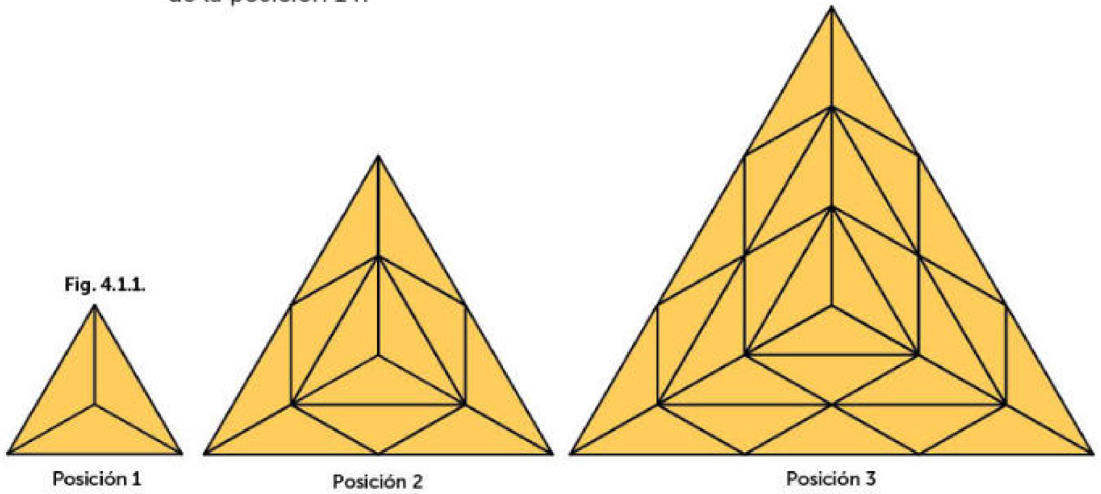
1. Sucesiones al cuadrado

Situación inicial

Una sucesión con triángulos

Observa los primeros tres elementos de la sucesión que ilustra la figura 4.1.1. Si la sucesión continúa de la misma manera, ¿cuántos triángulos tendrá el elemento de la posición 14?

Fig. 4.1.1.



Analiza

1. En parejas, analicen la sucesión y respondan.

a) ¿Cuántos triángulos tendrá el cuarto elemento de la sucesión? ______

b) ¿Y cuántos tendrán el quinto, el sexto y el séptimo elementos de la sucesión? ______

c) ¿De qué manera podrían saber cuántos triángulos tendría el elemento de la posición 14 sin obtener el número de triángulos de los elementos que le preceden? ______

d) ¿La progresión de la sucesión es aritmética o geométrica? Justifiquen su respuesta. ______

2. En grupo, compartan y discutan sus respuestas. Verifiquen que sean correctas y corrijan los errores que se presenten con ayuda de su profesor.

Explora y construye

Una expresión para una sucesión

1 En equipos, analicen la sucesión de la figura 4.1.2. Contesten y realicen lo que se indica.

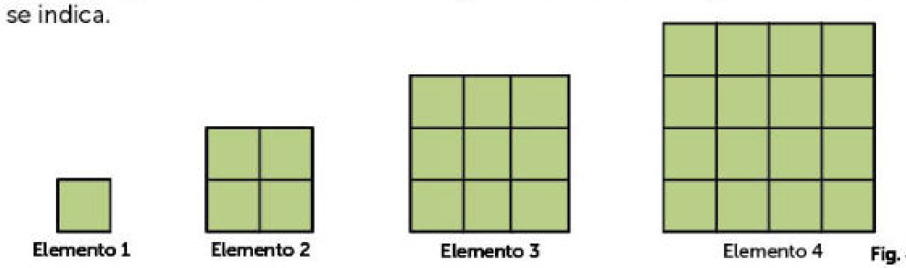


Fig. 4.1.2.

a) ¿Cuántos cuadrados tendrá el sexto elemento de la sucesión? Expliquen su procedimiento para obtener la respuesta. ______

b) ¿Cuántos cuadrados tendrán el octavo, el noveno y el décimo elementos? ______

c) ¿Cómo obtendrían un elemento de la figura, a excepción del primero, a partir del anterior? ______

d) De acuerdo con su respuesta anterior, ¿la sucesión es geométrica o aritmética? ¿Por qué? ______

e) Determinen una expresión algebraica que permita conocer la cantidad de cuadrados de cualquier elemento de la sucesión. Expliquen cómo lo hicieron. ______

f) ¿Cómo pueden comprobar que la expresión anterior sea correcta? Planteen su propuesta y corroboren su validez. ______

g) ¿Cuántos cuadrados formarán los elementos 90, 100 y 200? ______

h) Si un elemento de la sucesión tiene 3 844 cuadrados, ¿qué numero de elemento es? ______

i) ¿Es posible que 525 cuadrados formen un elemento de la sucesión? ¿Por qué? ______

2 Compartan y comparen sus respuestas con otro equipo. Discutan cómo obtuvieron la expresión algebraica del inciso e) y cómo verificaron que fuera correcta.

3 En parejas, consideren la sucesión formada por el último término de cada renglón de la pirámide de números y contesten.

Renglón 1						**1**					
Renglón 2					2	3	**4**				
Renglón 3				5	6	7	8	**9**			
Renglón 4			10	11	12	13	14	15	**16**		
Renglón 5		17	18	19	20	21	22	23	24	**25**	
Renglón 6	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	**36**

...

a) ¿Cuál es la relación entre el último número de cada renglón y el número del renglón en el que se localiza? ________

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite obtener el último número de cualquier renglón? ________

c) ¿Cuál es el último número del renglón 23? ________

d) ¿Al final de qué renglón se localizan los siguientes números? ¿Por qué?

- 484 ________
- 1 521 ________
- 3 600 ________

e) Determinen si los siguientes números están al final de un renglón de la pirámide. Justifiquen su respuesta.

- 6 241 ________
- 14 444 ________
- 21 025 ________

f) ¿La progresión de la sucesión es aritmética o geométrica? ¿Por qué? ________

4 En grupo, con ayuda de su profesor, verifiquen que sus respuestas sean correctas. Si se presentan errores, analicen los porqués y corríjanlos.

La regla de construcción de algunas sucesiones de números o de figuras se determina por una expresión algebraica de segundo grado. Por ejemplo, las dos sucesiones anteriores se definen por la regla n^2, donde n es el lugar que el término ocupa en la sucesión. Las sucesiones de ese tipo no son aritméticas ni geométricas.

5 En parejas, analicen la sucesión de la figura 4.1.3 y contesten lo que se pide.

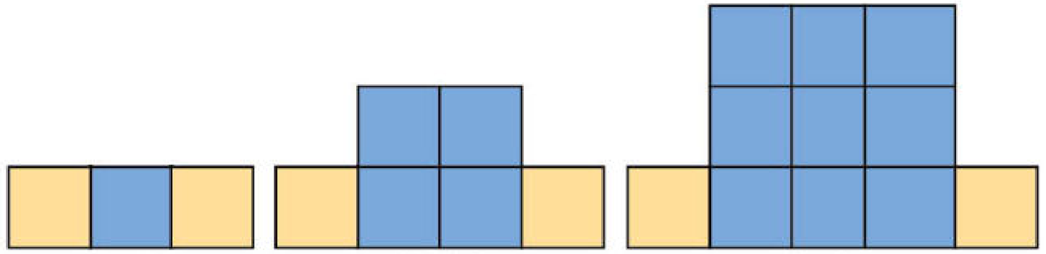


Fig. 4.1.3.

a) ¿Cuántos cuadrados tendrá el arreglo 5? Expliquen cómo lo determinaron.

____

b) ¿Cuál es la relación entre el número de cuadrados de un arreglo y el lugar que ocupa en la sucesión? ________

c) Escriban una expresión algebraica que permita calcular el número de cuadrados de cualquier arreglo de la sucesión. ________

6 Consideren la sucesión de la figura 4.1.4 y contesten.

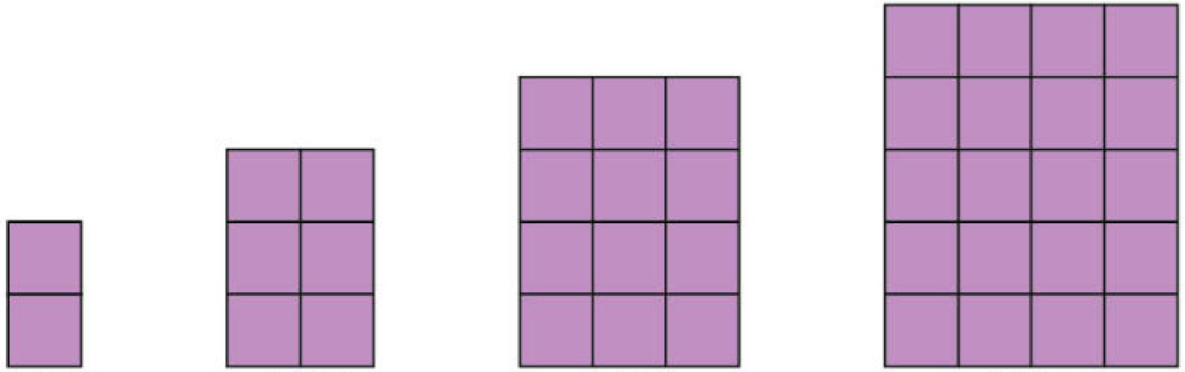


Fig. 4.1.4.

a) ¿Cuántos cuadrados tendrá el rectángulo de la sexta posición? ________

b) ¿Cuál es la relación entre el número de cuadrados en la base de cada rectángulo y la posición que ocupa en la sucesión? ________

c) ¿Cómo se relacionan el número de cuadrados en la altura de un rectángulo y su posición en la sucesión? ________

d) Determinen una expresión que permita calcular la cantidad de cuadrados de cualquier rectángulo de la sucesión cuando se sabe qué lugar ocupa. ________

e) Comprueben que su expresión sea correcta con algunos rectángulos de la sucesión.

f) ¿Cuántos cuadrados tendrá el rectángulo de la posición 16? ____________

g) ¿Con cuál de las siguientes cantidades de cuadrados se puede construir un rectángulo que pertenezca a la sucesión? Justifiquen su respuesta.

- 82 ____________
- 756 ____________
- 872 ____________

7 Compartan con otra pareja sus respuestas y procedimientos. Con ayuda de su profesor, verifiquen que sean correctos y corrijan los errores que se presenten.

Reglas de sucesión

1 En equipos, analicen la sucesión de la figura 4.1.5. Realicen y contesten lo que se indica.

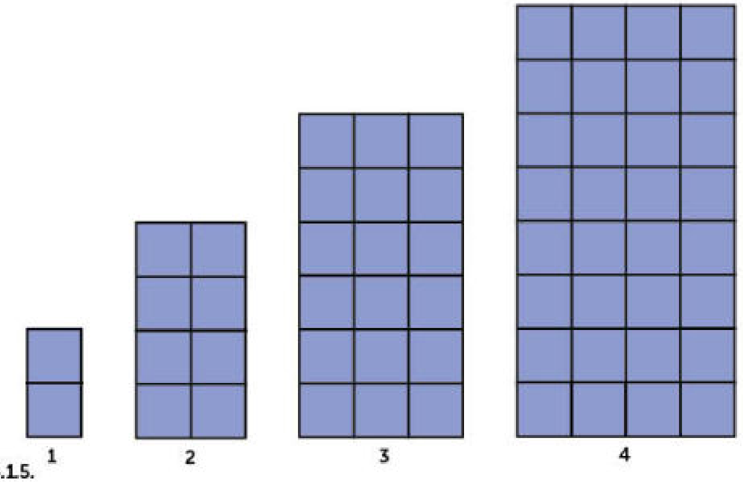


Fig. 4.1.5.

a) ¿Qué relación hay entre el número de cuadrados en la base de cada rectángulo y el lugar que ocupa en la sucesión? ____________

b) ¿Cuál es la relación entre el número de cuadrados en la altura de un rectángulo y su lugar en la sucesión? ____________

c) ¿Cómo se relacionan el número de cuadrados de un rectángulo y la posición que ocupa? ____________

d) ¿Qué expresión algebraica permite conocer el número de cuadrados del rectángulo si se sabe qué lugar ocupa en la sucesión? ____________

e) ¿Cuántos cuadrados tendrá el rectángulo de la posición 12? ____________

2 En grupo, comparen sus expresiones. Con apoyo de su profesor, verifiquen que sean correctas y determinen de qué tipo es la expresión que determinaron.

Reflexiona

1. Responde lo siguiente en tu cuaderno. Comenta tu respuesta con un compañero y verifiquen que sean correctas con ayuda de su profesor.
   a) ¿El número 71 pertenece a la sucesión que genera la expresión $n^2 + (n - 1)$? ¿Por qué?

Regresa y revisa

1 Lee de nuevo el problema de la situación inicial y contesta.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de triángulos de cualquier elemento de la sucesión si se conoce su posición? ____________

b) ¿Cuántos triángulos tendrá el elemento que ocupa la posición 21 de la sucesión? ____________

c) ¿Qué números corresponden a la cantidad de triángulos de un elemento de la sucesión? Justifica tu respuesta.

- 108 ____________
- 120 ____________
- 675 ____________

2 Comenten sus respuestas en grupo y asegúrense de que sean correctas con ayuda de su profesor. Discutan y corrijan los errores que se presenten.

Resuelve y practica

1. En parejas, realicen lo siguiente.
   a) Dibujen individualmente los primeros tres elementos de una sucesión cuya regla de correspondencia se defina por una expresión cuadrática.
   b) Intercambien la sucesión entre ustedes, y cada uno determine la expresión algebraica a partir de la cual se construye la sucesión de su compañero.
   c) Verifiquen que su expresión sea correcta.

2. Conos, cilindros y esferas

Situación inicial

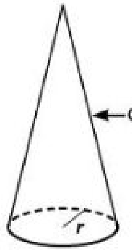


Fig. 4.2.1.

La torre de la maqueta

Un arquitecto está por terminar la maqueta de la próxima plaza de la ciudad, sólo le falta una torre con forma de cono de 17 cm de altura y base de 50.27 cm². ¿Cuáles son las dimensiones del desarrollo plano que el arquitecto debe hacer para construirlo?

Analiza

1. En parejas, respondan en su cuaderno.
   a) ¿Qué es el desarrollo plano de un cuerpo geométrico?
   b) ¿De cuáles elementos de un cono necesitan conocer sus medidas para trazar su desarrollo plano?
   c) ¿Qué figuras geométricas forman el desarrollo plano de un cono?
2. En grupo, comparen y comenten sus respuestas. Discutan qué datos deben calcular para construir el desarrollo plano que requiere el arquitecto.

Explora y construye

Sólidos de revolución

1 En equipos organizados por su profesor, realicen la siguiente actividad; necesitarán un pliego de cartulina, tres palos de madera y cinta adhesiva.

a) Reproduzcan en la cartulina cada una de las siguientes figuras a una escala mayor. Los palos de madera deben ser más largos que los segmentos negros.


Fig. 4.2.2.

b) Recorten cada figura y sobre el segmento negro peguen uno de los palos de madera. Obtendrán algo similar a un banderín.

- ¿Qué cuerpos geométricos verán con cada figura si giran el eje de los palos de madera? __________

c) Uno de ustedes sujete entre sus palmas el palo de madera de un banderín y frótenlas, de modo que el banderín gire rápidamente.
d) Realicen lo mismo con los otros dos banderines. Observen qué cuerpo geométrico se forma en cada caso y corroboren su respuesta a la pregunta final de la página anterior.

Los cuerpos que se forman al rotar una figura plana respecto a un eje se llaman *sólidos de revolución*. ¿Por qué piensan que reciben ese nombre? Expliquen en su cuaderno.

2 En grupo, respondan lo siguiente.

a) ¿Qué sólido de revolución se forma al girar cada uno de los banderines que construyeron? __________

b) Si utilizan distintos rectángulos, triángulos rectángulos y semicírculos, ¿qué sólidos de revolución obtendrán? __________

Las figuras 4.2.3, 4.2.4 y 4.2.5 muestran, respectivamente, los elementos de un cilindro, un cono y una esfera.

Fig. 4.2.3.

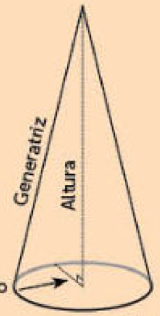


Fig. 4.2.4.

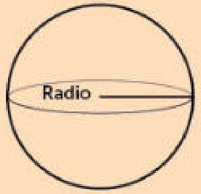


Fig. 4.2.5.

3 En parejas, realicen y contesten lo que se indica.

a) Marquen en los banderines las partes que, al girar, generan los elementos de los cuerpos.
b) ¿Cuál es la relación entre la altura y la generatriz del cilindro? __________
c) Si se considera el ángulo que forman la altura y el radio del cono, ¿cuál es la relación entre la medida de la generatriz y las medidas de la altura y el radio? __________

4 En grupo, compartan sus respuestas, y con ayuda de su profesor, verifiquen las relaciones que determinaron. Analicen y corrijan los errores que se presenten.

¿Cómo hacer un cilindro?

1 En parejas, copien en una hoja la figura 4.2.6 y coloreen los segmentos de los mismos colores que se muestran. Recórtenla y, con la pestaña, unan los lados verdes para formar uno de los sólidos de revolución que obtuvieron con los banderines. Luego respondan.

Fig. 4.2.6.

Toma nota

Localiza el término "sólidos de revolución" en el glosario (págs. 256-258); con tus propias palabras escribe su definición y un ejemplo.

a) ¿Qué cuerpo geométrico obtuvieron? ______

b) ¿Qué representan los lados azules del rectángulo en el cuerpo armado? ______

c) ¿Cuánto mide el radio de la base del cuerpo que armaron? Expliquen cómo lo determinaron. ______

d) Expliquen cómo obtener la medida de la generatriz y la de la altura del sólido a partir del rectángulo de la figura 4.2.6. ______

e) Utilicen el cuerpo que armaron para trazar sus bases en una hoja, recórtenlas y péguenlas al cuerpo anterior para obtener el cuerpo completo. Verifiquen sus respuestas a los incisos b) y c).

2 Escriban en su cuaderno un procedimiento para trazar los desarrollos planos de los cuerpos con las siguientes características; trácenlos, recórtenlos y ármenlos.

a) Un cilindro de 10 cm de altura y base de 2 cm de radio; consideren $\pi = 3.14$.

b) Un cilindro de 12 cm de altura, cuyas bases juntas comprendan una superficie de 28.26 cm^2; consideren $\pi = 3.14$.

3 En grupo, comparen sus procedimientos y desarrollos planos. Midan los cuerpos que armaron para corroborar que cumplen las condiciones. Analicen las causas de los errores que se presenten, corríjanlos y verifiquen sus resultados con apoyo de su profesor.

¿Cómo hacer un cono?

1 En parejas, calquen en una hoja la figura 4.2.7 y coloreen los lados de los mismos colores. Recórtenla y, con la pestaña, unan los lados verdes para formar otro de los sólidos de revolución que obtuvieron con los banderines. Realicen y respondan lo que se indica.

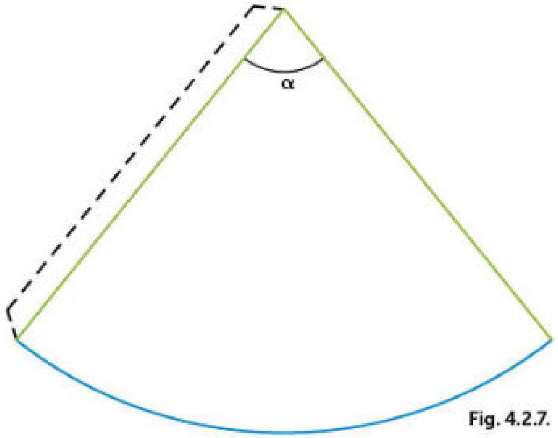


Fig. 4.2.7.

a) Describan el cuerpo geométrico que armaron. ______

b) A partir de la figura 4.2.7 determinen la medida de la generatriz. ______

c) Sin la pestaña, la figura 4.2.7 es un sector circular. ¿Cuál es el radio de ese sector? ¿Qué relación hay entre ese dato y la generatriz? ______

d) Expliquen cómo se obtiene la longitud del lado azul. ______

e) ¿Cuánto mide el radio de la base del cuerpo que armaron? Expliquen cómo lo determinaron. ______

f) Coloquen sobre una hoja el cuerpo que armaron para trazar su base y verifiquen su respuesta anterior.

g) Calculen el ángulo del sector circular con base en la medida del lado azul. Expliquen su procedimiento y verifiquen su resultado con un transportador. ______

h) Calculen la altura del cuerpo que armaron, ¿qué medidas deben considerar? Anoten su procedimiento y midan la altura del cuerpo construido para verificar su respuesta. ______

2 Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otra pareja. Con apoyo de su profesor analicen y corrijan los errores que se presenten.

3 En equipos, lean lo siguiente y respondan. Justifiquen sus respuestas.

Se trazó el desarrollo plano de un cono de 10 cm de altura y una base de 3 cm de radio.

a) ¿Cuánto mide el perímetro del círculo del desarrollo plano? ____________

b) ¿Cuánto miden el ángulo y el radio del sector circular? ¿Cuál es la longitud del arco que abarca? ____________

4 Tracen en una hoja el desarrollo plano con las medidas que obtuvieron en la actividad anterior. Construyan el cono para verificar que tiene las dimensiones correspondientes.

Reflexiona

1. En parejas, observen la figura 4.2.8 y contesten.
   a) ¿Qué sólido se forma al desplazar el círculo en la dirección de la flecha? ____________
   b) Si fuera un rectángulo en lugar de un círculo, ¿qué sólido se obtendría? ____________
   c) Explica cómo tendría que cambiar la forma del círculo, conforme se desplaza, para obtener un cono. ____________

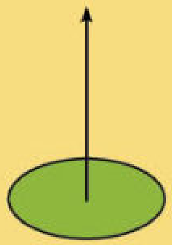


Fig. 4.2.8.

2. Expliquen por qué no es posible trazar el desarrollo plano de una esfera. ____________

Regresa y revisa

1 Retoma el problema de la situación inicial y calcula la medida de cada elemento del desarrollo plano que debe trazar el arquitecto.

Generatriz: ____________ Arco del sector circular: ____________

Ángulo del sector circular: ____________

2 En grupo, expliquen en su cuaderno cómo modificar las medias anteriores para construir un cono de la misma altura que el de la situación inicial, pero cuya base sea la mitad del radio.

Resuelve y practica

1. Realiza y responde en tu cuaderno lo siguiente. Verifica tus respuestas en grupo.
   a) Explica por qué las siguientes figuras no corresponden al desarrollo plano de un cilindro.

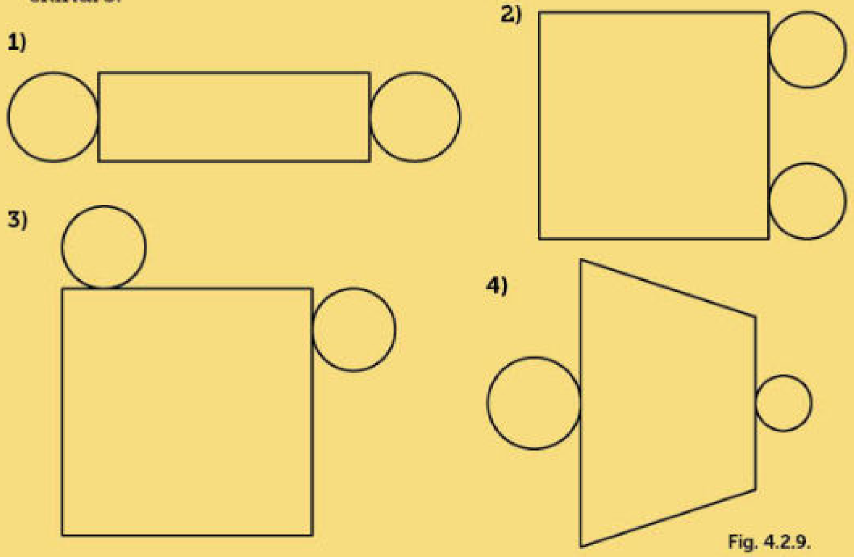


Fig. 4.2.9.

   b) Si dos círculos tienen 5 cm de diámetro cada uno, ¿qué medidas debe tener un rectángulo para formar con ellos un cilindro de 20 cm de altura? Justifica tu respuesta.
   c) Calcula el área total de la superficie de un cilindro de 16 cm de altura y cuyas bases tienen un radio de 3 cm cada una.
   d) ¿Qué altura tendrá un cilindro y cuál será el radio de su base si el rectángulo de su desarrollo plano mide 17 cm × 24 cm?
   e) Calcula el área de la superficie de un cono que mide 12 cm de altura y tiene una base de 1.5 cm de radio.
   f) El sector circular del desarrollo plano de un cono mide 14 cm de radio y su ángulo es de 65°.
      - ¿Cuánto medirá el radio de su base?
      - ¿Cuál será la altura del cono una vez armado?

3. La pendiente y la tangente de una recta

Situación inicial

La rampa

En una central de abasto se necesita construir una rampa para el ascenso y descenso de mercancías. La ingeniera civil encargada del proyecto representó la rampa con el segmento de recta dado por la ecuación $y = \frac{1}{3}x$, como muestra la figura 4.3.1, donde el eje horizontal representa el suelo. ¿Cuál es el ángulo de inclinación (α) de la rampa respecto al suelo?

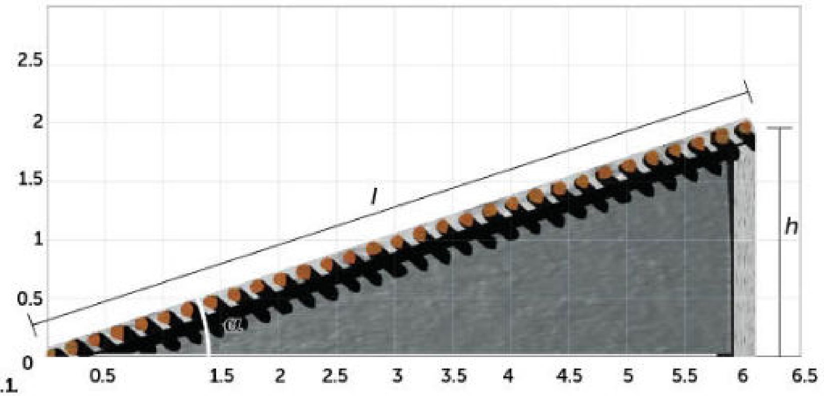


Fig. 4.3.1.

Analiza

1. En parejas, respondan lo siguiente en su cuaderno.
   - **a)** ¿Cuál es la pendiente de la rampa?
   - **b)** ¿Cuáles son las coordenadas del punto que representa la posición de un objeto sobre la rampa a una altura de 1 m respecto al suelo?
   - **c)** ¿Cuáles son las coordenadas del punto sobre la recta que se encuentra a una altura de 2 m respecto al suelo?
   - **d)** ¿Qué relación observan entre los valores de ambas coordenadas? ¿Esta relación se conserva para cualquier otro punto sobre la recta? Compruébenlo.
   - **e)** Tracen otra recta que pase por el origen, pero con una pendiente distinta, y repitan las tres preguntas anteriores.
   - **f)** ¿Cuál es la relación entre las coordenadas de los puntos sobre la recta y su pendiente? Argumenten su respuesta.
   - **g)** ¿Existe una relación entre la inclinación de una recta y el ángulo que forma con el eje horizontal? ¿Cómo es esa relación?
2. En grupo, compartan sus respuestas. Expongan sus argumentos respecto a las relaciones que se plantean y, con apoyo de su profesor, verifiquen que sean correctas.

Explora y construye

La tangente de un ángulo

1 En parejas, analicen la figura 4.3.2, donde la recta azul está definida por la ecuación $y = 0.4x$, y contesten.

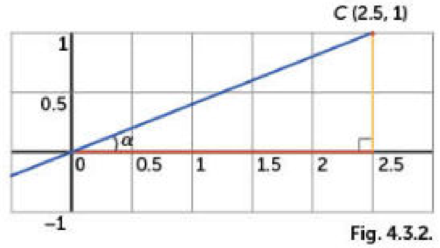


Fig. 4.3.2.

- **a)** ¿Cuál es la pendiente de la recta azul? ______
- **b)** ¿Qué tipo de triángulo se forma con la recta, el eje de las abscisas y la recta vertical que pasa por el punto C? ______
- **c)** ¿Cuánto miden el lado amarillo y el lado rojo? ______
- **d)** ¿Cuál es el cociente de dividir la medida del lado amarillo entre la del lado rojo? ______
- **e)** ¿Cómo se relaciona el resultado anterior con la pendiente de la recta? Escriban sus conclusiones. ______

En un triángulo rectángulo el *cateto opuesto* al ángulo α es el lado azul, el *cateto adyacente* es el verde y la *hipotenusa*, el morado, que es el opuesto al ángulo recto.

2 En equipos, realicen y contesten lo que se indica.

- **a)** Tracen un triángulo rectángulo para cada punto que se indica en la figura 4.3.3, de modo que su hipotenusa sea un segmento de la recta azul y un cateto esté sobre el eje horizontal o una recta paralela a éste. Observen el ejemplo.
- **b)** Construyan otros tres triángulos rectángulos sobre otros puntos de la recta, de modo que las hipotenusas sean segmentos de la recta azul.
- **c)** Numeren del 1 al 6 los triángulos que construyeron.
- **d)** ¿Cómo son entre sí los triángulos? ¿Por qué? ______
- **e)** Identifiquen el ángulo β en los triángulos que trazaron.

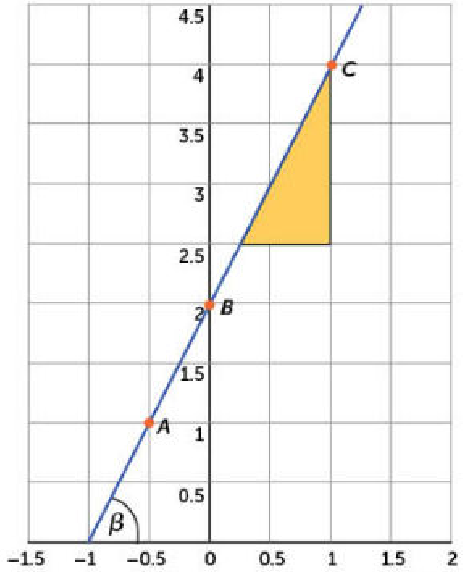


Fig. 4.3.3.

f) Calculen el cociente de la razón $\frac{\text{cateto opuesto a } \beta}{\text{cateto adyacente a } \beta}$ para los triángulos que construyeron.

g) Con base en su respuesta anterior, respondan, ¿qué tienen en común todos los triángulos construidos? ______

h) ¿Cómo suponen que será el cociente de la razón $\frac{\text{cateto opuesto a } \beta}{\text{cateto adyacente a } \beta}$ para cualquier triángulo rectángulo con hipotenusa sobre la recta azul? Argumenten su respuesta. ______

Busca en...

www.edutics.mx/4uG donde podrás observar la relación entre la pendiente de una recta, su ángulo de inclinación y el cociente de los catetos de un triángulo rectángulo construido bajo ella. (Consulta: 20 de enero de 2019).

i) Subrayen la ecuación que corresponde a la recta y justifiquen su respuesta. Identifiquen la pendiente de la recta.

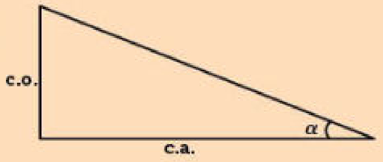
- $y = 3x + 2$
- $y = 3x - 2$
- $y = 2x + 2$
- $y = 2x - 2$

j) ¿Cómo se relacionan la pendiente de la recta y el cociente del cateto opuesto a β entre su cateto adyacente? ______

k) ¿Cómo es posible obtener la pendiente de una recta a partir de las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un segmento de la recta? ______

3 En grupo, compartan y comenten sus resultados. Establezcan una conclusión sobre la relación entre la pendiente de una recta y el cociente de los catetos de los triángulos cuya hipotenusa es un segmento de la recta. Con ayuda de su profesor, verifiquen su validez y corrijan los errores que se presenten.

En un triángulo rectángulo, la *tangente* de un ángulo es la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo. La tangente no está definida cuando el ángulo es de 90°.



$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha \text{ (c.o.)}}{\text{cateto adyacente a } \alpha \text{ (c.a.)}}$$

4 En equipos, respondan y realicen lo siguiente. Luego verifiquen las respuestas con el resto del grupo.

a) ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo formado por la recta $y = 2.75x - 12$ y el eje horizontal? ______

b) Expliquen cuál es el valor de la tangente del ángulo formado por una recta, cuya ecuación es $y = mx + b$, y el eje horizontal. ______

La pendiente de una recta y su ángulo de inclinación

Usa tu calculadora

1. En parejas, realicen lo siguiente a partir de figura 4.3.3 de la página 175.
   a) Usen el transportador para medir el ángulo y anoten su resultado. ______
   b) Presionen la tecla **tan** en una calculadora e ingresen el valor obtenido en el inciso anterior. Opriman la tecla **=** y anoten el número que obtuvieron. En algunas calculadoras primero se ingresa la medida del ángulo y luego se presiona la tecla **tan**.
   c) ¿Cómo se relaciona el valor anterior con la pendiente de la recta azul? ______

   Verifiquen que la calculadora esté en la función **DEG** (grados) para hacer las operaciones.

1 Analicen las rectas de la figura 4.3.4. Realicen y contesten lo que se pide.

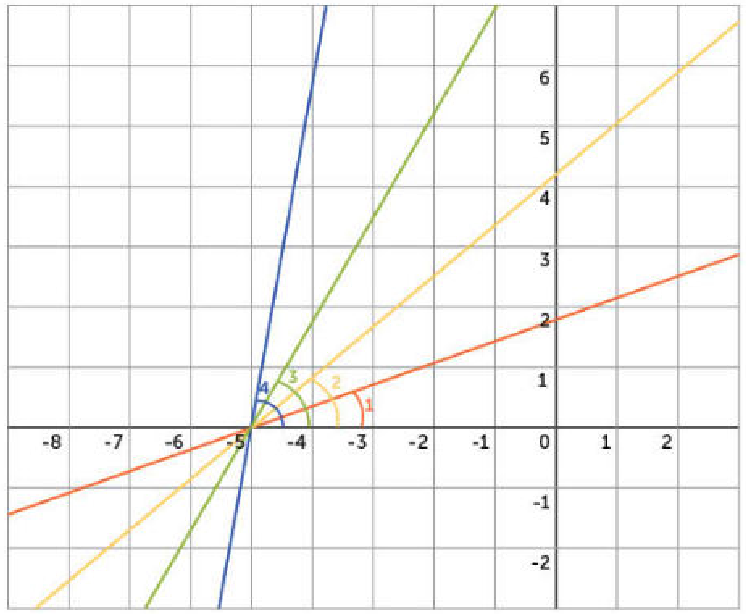


Fig. 4.3.4.

a) Realicen los trazos, mediciones y operaciones necesarias para completar la tabla 4.3.1. Pueden utilizar calculadora.

Ángulo	Medida del ángulo	Valor de la tangente	Pendiente de la recta
1			
2			
3			
4			

Tabla 4.3.1.

b) ¿Cómo obtuvieron el valor de la tangente a partir de la medida del ángulo?

c) Con otra pareja analicen la relación entre la pendiente de una recta y el ángulo que forma con el eje de las abscisas. Anoten sus conclusiones.

Toma nota

Localiza el término "tangente" en el glosario (págs. 256-258); con tus propias palabras escribe su definición y un ejemplo.

2 En grupo, compartan sus respuestas y con ayuda de su profesor, verifiquen que sean correctas y discutan cómo obtener el valor de la pendiente de una recta con base en la medida del ángulo que forma con el eje horizontal.

3 En equipos, realicen y respondan lo siguiente. Justifiquen en su cuaderno.

a) En el plano de la figura 4.3.5, tracen una recta que pase por el punto (5, 0) y que forme un ángulo de 60° con el eje horizontal.

- ¿Cuál es la pendiente de la recta?
- Anoten la ecuación de la recta.

b) Tracen en el mismo plano una recta que pase por el punto (2, 0) y que forme un ángulo de 120° con el eje horizontal.

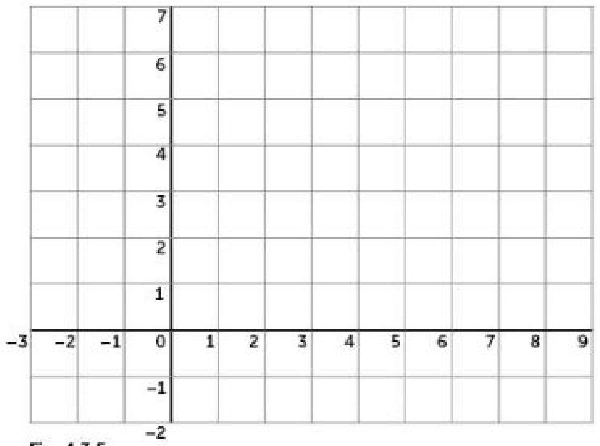


Fig. 4.3.5.

- Sin hacer cálculos, expliquen si la pendiente de la recta es positiva o negativa.
- Obtengan la tangente de 120° con su calculadora. Anoten el resultado.
- ¿Cuál es la ecuación de la recta?

4 Compartan y comenten sus respuestas con otro equipo. Analicen y corrijan los errores que se presenten.

Usa tu calculadora

1. En grupo, realicen lo siguiente.
   a) Investiguen cuál es la sucesión de teclas que deben presionar en una calculadora para obtener el valor de un ángulo a partir de su tangente.
   b) Escriban en su cuaderno un procedimiento para calcular el ángulo que forma una recta si su ecuación es $y = mx + b$.

Reflexiona

1. Explica cómo obtener la tangente del ángulo *A* de la figura 4.3.6 a partir de los catetos del triángulo verde.

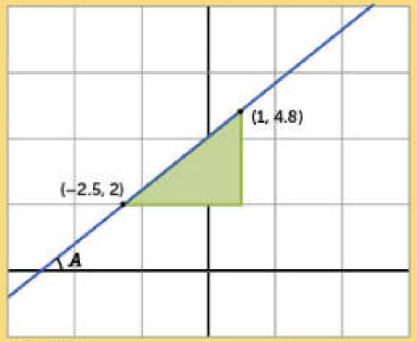


Fig. 4.3.6.

Regresa y revisa

1 Lee de nuevo el problema de la situación inicial y, con base en los conocimientos adquiridos en la lección, determina sin transportador la medida del ángulo α. Argumenta tu respuesta en tu cuaderno.

2 En grupo, verifiquen que su argumentación sea correcta con apoyo de su profesor.

Resuelve y practica

1. A partir de la figura 4.3.7 explica cuál es la tangente de 45°.

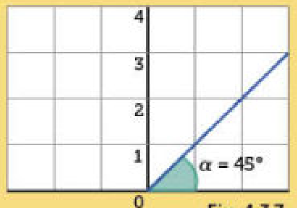


Fig. 4.3.7.

2. Explica por qué la tangente del ángulo *B* de la figura 4.3.8 se puede obtener a partir de la ecuación de la recta azul, si ésta es paralela a la recta roja.

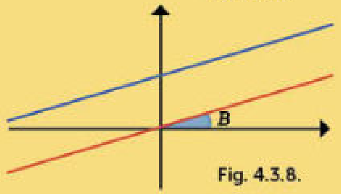


Fig. 4.3.8.

3. Traza en tu cuaderno lo necesario para obtener el valor de la tangente de un ángulo de 70° sin usar calculadora.

4. Seno, coseno y tangente

Situación inicial

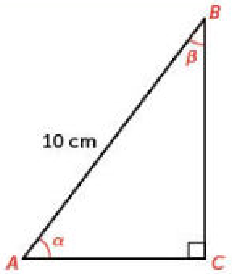


Fig. 4.4.1.

El cateto opuesto entre la hipotenusa

En el triángulo *ABC* de la figura 4.4.1, la razón del cateto opuesto al ángulo α entre la hipotenusa es igual a 0.8. ¿Cuánto mide el ángulo β?

Analiza

1. En parejas, respondan lo siguiente.
   - **a)** ¿Cuál es la medida del lado $\overline{BC}$ del triángulo? Justifiquen su respuesta. ______
   - **b)** Obtengan la medida del tercer lado del triángulo, es decir, el lado $\overline{AC}$. Expliquen su procedimiento. ______
   - **c)** Expliquen cómo obtener la medida del ángulo α y determinen su valor. ______
   - **d)** ¿Cuánto mide al ángulo β? Expliquen cómo obtuvieron su valor. ______
2. En grupo, comparen sus respuestas y procedimientos con los de otra pareja. Con ayuda de su profesor verifiquen que sean correctos y respondan.
   - **a)** ¿Cómo son entre sí el triángulo de la figura 4.4.1 y el de la figura 4.4.2? ¿Por qué? ______
   - **b)** ¿Cuánto vale la razón del cateto opuesto a γ entre la hipotenusa? ______
   - **c)** ¿Qué pueden concluir de lo anterior? ______
   - **d)** Calculen la razón entre el lado adyacente a α y la hipotenusa del triángulo *ABC* y la razón entre el lado adyacente a γ y la hipotenusa del triángulo *A'B'C'*. ¿Qué observan? ______

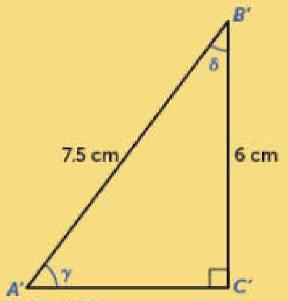


Fig. 4.4.2.

Explora y construye

Seno y coseno de un ángulo

1 En parejas, realicen y contesten lo que se indica.

- **a)** Sitúen dos puntos sobre el segmento $\overline{AB}$ del triángulo de la figura 4.4.3 y nómbrenlos *B'* y *B"*, respectivamente.
- **b)** Tracen dos rectas paralelas al segmento $\overline{BC}$: una que pase por el punto *B'* y otra por el punto *B"*. Designen como *C'* y *C"* las respectivas intersecciones de las rectas con el segmento $\overline{AC}$.

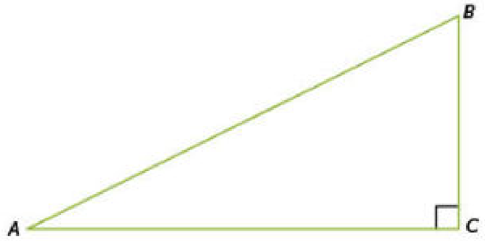


Fig. 4.4.3.

- **c)** Hagan las mediciones necesarias para calcular las siguientes razones y escriban el cociente como número decimal.

$\frac{BC}{AB}$ = —— = $\frac{AC}{AB}$ = —— = $\frac{BC}{AC}$ = —— =

$\frac{B'C'}{AB'}$ = —— = $\frac{AC'}{AB'}$ = —— = $\frac{B'C'}{AC'}$ = —— =

$\frac{B''C''}{AB''}$ = —— = $\frac{AC''}{AB''}$ = —— = $\frac{B''C''}{AC''}$ = —— =

- **d)** ¿Qué relación observan entre estos cocientes? ______

2 En grupo, compartan y comparen sus resultados con los de otra pareja. Determinen con ayuda de su profesor si se obtendrían las mismas relaciones en caso de que los puntos *B'* y *B"* se hubieran colocado en otros lugares del segmento $\overline{AB}$.

3 En parejas, consideren de nuevo el triángulo *ABC* de la figura 4.4.3. Realicen y respondan lo siguiente.

- **a)** Nombren η al ángulo interior que forman los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
- **b)** En el triángulo *ABC*, ¿cuál es el cateto opuesto a η?, ¿cuál el cateto adyacente a η?, ¿y cuál la hipotenusa?

  Cateto opuesto: ______ Cateto adyacente: ______

  Hipotenusa: ______
- **c)** ¿Qué igualdades del inciso c) de la actividad 1 corresponden a la tangente del ángulo η? ______
- **d)** ¿Cuánto mide el ángulo η? ______

En un triángulo rectángulo, el *seno* de un ángulo se define como la razón de su cateto opuesto entre la hipotenusa, y el *coseno* es la razón de su cateto adyacente entre la hipotenusa.

El seno y el coseno de un ángulo, en este caso el ángulo x, se representan con los símbolos *sen* y *cos*, respectivamente:

$$\text{sen}\ x = \frac{\text{cateto opuesto a } x}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos x = \frac{\text{cateto adyacente a } x}{\text{hipotenusa}}$$

A las razones seno, coseno y tangente se les llama *razones trigonométricas*.

e) ¿Cuál es el valor de sen η en la figura 4.4.3? ____________

f) ¿Y cuánto vale cos η? ____________

4 En grupo, compartan y comenten sus respuestas con las de otra pareja. Con apoyo de su profesor verifiquen que sean correctas y respondan lo siguiente.

a) ¿Es posible calcular el valor del seno de η y el del coseno de η a partir del triángulo $AB'C'$ o del triángulo $AB''C''$? Justifiquen su respuesta. ____________

____

b) ¿Para conocer las medidas de los lados de un triángulo rectángulo basta conocer el valor del seno de uno de sus ángulos? ¿Por qué? ____________

____

c) Si la respuesta anterior es afirmativa, expliquen el procedimiento que seguirían. De lo contrario, indiquen qué otro dato es necesario. ____________

____

Relaciones entre el seno, el coseno y la tangente

1 En equipos, tracen un triángulo rectángulo. Nombren α a uno de los ángulos agudos y β, al otro.

a) Sin usar transportador, indiquen cuánto suman los ángulos α y β. Justifiquen su respuesta. ____________

b) Calculen las razones trigonométricas para los ángulos α y β; primero como una razón y luego como número decimal.

sen α = ______ =   cos α = ______ =

sen β = ______ =   cos β = ______ =

c) ¿Qué relación observan entre estos valores? ____________

____

2 En grupo, comparen las medidas de los triángulos que trazaron y las relaciones entre los senos y cosenos de sus ángulos. ¿En todos se cumplen las mismas relaciones? Escriban en sus cuadernos una conclusión grupal. Realicen y respondan en su cuaderno lo que se indica.

a) Determinen cómo se relacionan los valores del seno y el coseno de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con los del seno y el coseno del otro ángulo agudo.

b) Justifiquen su respuesta anterior a partir de la definición de seno y coseno.

c) Si el coseno de un ángulo de 53° es de aproximadamente 0.6, ¿cuánto vale el seno de un ángulo de 37°? ¿Por qué?

d) Si el seno de un ángulo de 11° es de aproximadamente 0.19, ¿cuánto vale el coseno de un ángulo de 79°? Justifiquen su respuesta.

Usa tu calculadora

1. Realiza lo siguiente a partir del triángulo que trazaste en la página anterior.

   a) Mide con transportador los ángulos α y β, y anota sus valores. ____________

   b) Emplea las teclas **sen** y **cos** de una calculadora (a veces aparece la tecla **sin** en lugar de **sen**) con la medida de los ángulos α y β para corroborar tus respuestas del inciso b) de la actividad 1 anterior. Para hacer las operaciones verifiquen que la calculadora esté en la función **DEG** (grados).

   c) Explica tu procedimiento. ____________

2. En grupo, verifiquen sus procedimientos. Comenten cómo calcular el seno y el coseno de un ángulo en distintas calculadoras.

Las *tablas de razones trigonométricas*, como la de la siguiente página, son útiles cuando no se dispone de una calculadora.

3 En grupo, analícenla y discutan cómo se usan estas tablas.

Medida del ángulo A (°)	Tan A	Sen A	Cos A
1	0.0175	0.0175	0.9998
2	0.0349	0.0349	0.9994
3	0.0524	0.0523	0.9986
4	0.0699	0.0698	0.9976
5	0.0875	0.0872	0.9962
6	0.1051	0.1045	0.9945
7	0.1228	0.1219	0.9925
8	0.1405	0.1392	0.9903
9	0.1584	0.1564	0.9877
10	0.1763	0.1736	0.9848
11	0.1944	0.1908	0.9816
12	0.2126	0.2079	0.9781
13	0.2309	0.2250	0.9744
14	0.2493	0.2419	0.9703
15	0.2679	0.2588	0.9659
16	0.2867	0.2756	0.9613
17	0.3057	0.2924	0.9563
18	0.3249	0.3090	0.9511
19	0.3443	0.3256	0.9455
20	0.3640	0.3420	0.9397
21	0.3839	0.3584	0.9336
22	0.4040	0.3746	0.9272
23	0.4245	0.3907	0.9205
24	0.4452	0.4067	0.9135
25	0.4663	0.4226	0.9063
26	0.4877	0.4384	0.8988
27	0.5095	0.4540	0.8910
28	0.5317	0.4695	0.8829
29	0.5543	0.4848	0.8746
30	0.5774	0.5	0.8660
31	0.6009	0.5150	0.8572
32	0.6249	0.5299	0.8480
33	0.6494	0.5446	0.8387
34	0.6745	0.5592	0.8290
35	0.7002	0.5736	0.8192
36	0.7265	0.5878	0.8090
37	0.7536	0.6018	0.7986
38	0.7813	0.6157	0.7880
39	0.8098	0.6293	0.7771
40	0.8391	0.6428	0.7660
41	0.8693	0.6561	0.7547
42	0.9004	0.6691	0.7431
43	0.9325	0.6820	0.7314
44	0.9657	0.6947	0.7193
45	1	0.7071	0.7071

Medida del ángulo A (°)	Tan A	Sen A	Cos A
46	1.0355	0.7193	0.6947
47	1.0724	0.7314	0.6820
48	1.1106	0.7431	0.6691
49	1.1504	0.7547	0.6561
50	1.1918	0.7660	0.6428
51	1.2349	0.7771	0.6293
52	1.2799	0.7880	0.6157
53	1.3270	0.7986	0.6018
54	1.3764	0.8090	0.5878
55	1.4281	0.8192	0.5736
56	1.4826	0.8290	0.5592
57	1.5399	0.8387	0.5446
58	1.6003	0.8480	0.5299
59	1.6643	0.8572	0.5150
60	1.7321	0.8660	0.5
61	1.8040	0.8746	0.4848
62	1.8807	0.8829	0.4695
63	1.9626	0.8910	0.4540
64	2.0503	0.8988	0.4384
65	2.1445	0.9063	0.4226
66	2.2460	0.9135	0.4067
67	2.3559	0.9205	0.3907
68	2.4751	0.9272	0.3746
69	2.6051	0.9336	0.3584
70	2.7475	0.9397	0.3420
71	2.9042	0.9455	0.3256
72	3.0777	0.9511	0.3090
73	3.2709	0.9563	0.2924
74	3.4874	0.9613	0.2756
75	3.7321	0.9659	0.2588
76	4.0108	0.9703	0.2419
77	4.3315	0.9744	0.2250
78	4.7046	0.9781	0.2079
79	5.1446	0.9816	0.1908
80	5.6713	0.9848	0.1736
81	6.3138	0.9877	0.1564
82	7.1154	0.9903	0.1392
83	8.1443	0.9925	0.1219
84	9.5144	0.9945	0.1045
85	11.4301	0.9962	0.0872
86	14.3007	0.9976	0.0698
87	19.0811	0.9986	0.0523
88	28.6363	0.9994	0.0349
89	57.2900	0.9998	0.0175
90	-------	1	0

Tabla. 4.4.1.

4 En parejas, tracen en su cuaderno otro triángulo rectángulo y designen los ángulos agudos como A y B, respectivamente. Escriban los valores de las tangentes como cocientes y luego como números decimales.

tan A = ______ =   tan B = ______ =

a) ¿Cómo se relaciona el valor de la tangente de A con el valor de la tangente de B? Justifiquen su respuesta con la definición de tangente. ______

b) ¿Cuál es el producto de multiplicar el valor de la tangente de A por el de la tangente de B? Comprueben su respuesta a partir de la definición de tangente. ______

Toma nota

Localiza los términos "seno" y "coseno" en el glosario (págs. 256-258); con tus propias palabras escribe la definición y un ejemplo de cada uno.

5 En grupo, comparen los triángulos que trazaron y comprueben si en todos se cumple la misma relación para las tangentes. Con ayuda de su profesor, comenten y corrijan los errores que surjan.

Reflexiona

1. En parejas, consideren un triángulo rectángulo ABC y resuelvan lo siguiente.
   - a) ¿Qué condiciones deben cumplir los lados del triángulo para que los valores del seno y del coseno de ambos ángulos agudos sean iguales? ______
   - b) ¿Cómo se representa lo anterior en la tabla 4.4.1? ______
   - c) Si la tangente de uno de los ángulos agudos del triángulo es igual a T, ¿cómo obtendrían el valor de la tangente del otro ángulo agudo? ______

Regresa y revisa

1 En grupo, lean nuevamente el problema de la situación inicial y respondan lo siguiente.

a) ¿Cuánto vale el coseno de α en el triángulo ABC? ______

b) ¿Cuánto mide al ángulo β? Expliquen su procedimiento para encontrar el valor. ______

c) Si el seno de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 0.5, y la hipotenusa mide cinco unidades, ¿cuánto mide el otro ángulo agudo? ______

5. Razones trigonométricas y círculo unitario

Situación inicial

Fig. 4.5.1.

Las Torres KIO

La figura 4.5.1 es una fotografía de las Torres KIO, en Madrid, España. Cada una mide alrededor de 114 m de altura y forma un ángulo de 15° con la vertical. Si se suelta una piedra desde la parte superior, como indica la flecha, ¿a qué distancia de la base de la torre caería?

Analiza

1. En parejas, realicen y respondan lo siguiente.
   a) Escriban un procedimiento para resolver el problema. Justifiquen sus respuestas y llévenlo a cabo. ____________________
   b) ¿Cómo resolverían el problema si consideraran el ángulo de inclinación de la torre respecto al suelo? Expliquen su respuesta. ____________________
2. En grupo, compartan y comenten sus procedimientos y respuestas con otra pareja. Con apoyo de su profesor verifiquen que sean correctos y corrijan los errores que surjan.

Explora y construye

El círculo unitario

1 En equipos de tres integrantes, consideren el arco de circunferencia de la figura 4.5.2 en la siguiente página. Respondan y realicen lo que se pide.

a) ¿Cuánto mide el radio del arco? ____________________

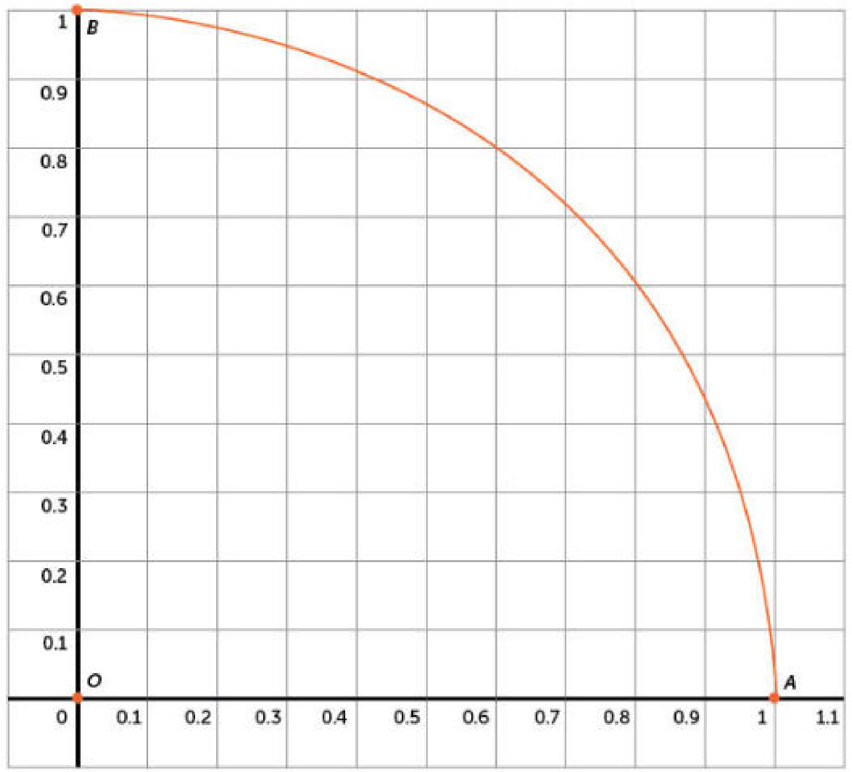


Fig. 4.5.2.

b) Tracen una recta desde el punto *O* hasta el arco y que forme un ángulo de 30° con el segmento $\overline{OA}$; nombren *C* al punto donde interseca al arco de circunferencia.

c) Tracen una recta que pase por *C* y que sea perpendicular al eje horizontal; designen con *D* al punto donde interseca a ese eje.

d) ¿De qué tipo es el triángulo *ODC* respecto a sus ángulos? ____________________

e) ¿Cuáles son las medidas de sus lados? Expliquen cómo las determinaron. ____________________

f) ¿Cuáles son las coordenadas del punto *C*? ____________________

g) Calculen el valor de estas razones trigonométricas. Escriban el resultado como cociente y luego como número decimal.

sen 30° = ——— =   cos 30° = ——— =

h) ¿Qué relación observan entre los valores de las razones trigonométricas y las coordenadas del punto *C*? ____________________

i) Tracen una recta tangente al arco de circunferencia que pase por el punto *A*. Prolonguen el segmento $\overline{OC}$ hasta intersecar la recta tangente y nombren *E* al punto de intersección.

j) ¿Cuáles son las coordenadas del punto *E*? ¿Por qué? ______

k) ¿Cuáles son las medidas del triángulo *OAE*? ______

l) Calculen la tangente de 30° con los valores que obtuvieron en el inciso g). ______

m) ¿Cómo se relaciona el resultado anterior con el triángulo *OAE*? ______

n) Expliquen qué relación hay entre el valor de la tangente y las coordenadas del punto *E*. ______

2 Compartan con otro equipo sus conclusiones y verifíquenlas con ayuda de su profesor.

3 En grupo, realicen lo siguiente.

a) Definan el seno de un ángulo agudo en un círculo unitario con base en la relación que determinaron. ______

b) De manera similar definan al coseno de un ángulo agudo en el círculo unitario. ______

c) Respondan a partir de sus definiciones lo siguiente. Justifiquen su respuesta.

- ¿Cuánto valen sen 0° y cos 0°? ______
- ¿Cuánto valen sen 90° y cos 90°? ______

d) Consideren la recta tangente al arco de circunferencia de la figura 4.5.2, y expliquen cómo obtener, a partir de ella, la tangente de un ángulo agudo en el círculo unitario. ______

e) Respondan considerando su explicación anterior.

- ¿Cuál es el valor de tan 0°? ______
- ¿Por qué la tangente de 90° no está definida? ______

f) Verifiquen con calculadora los valores que obtuvieron en los incisos c) y e).

Busca en...
www.edutics.mx/4uN donde encontrarás una aplicación para calcular las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. (Consulta: 20 de enero de 2019).

4 Realiza en la figura 4.5.2 los trazos necesarios para completar la tabla 4.5.1.

Medida del ángulo	Seno	Coseno	Tangente
20°			
40°			
45°			
60°			
80°			

Tabla 4.5.1.

5 Verifica tus respuestas con la tabla de razones trigonométricas de la página 184.

Problemas que implican el uso de triángulos rectángulos

1 En parejas, calculen las dimensiones que faltan de los siguientes triángulos. Usen calculadora o la tabla de razones trigonométricas de la página 184. Justifiquen las respuestas en su cuaderno.

a) En el triángulo *PQR* de la figura 4.5.3:

- $\measuredangle Q$ = ______
- $\overline{QP}$ = ______
- $\overline{RP}$ = ______

b) En el triángulo *ACB* de la figura 4.5.4:

- $\overline{AB}$ = ______
- $\measuredangle A$ = ______
- $\measuredangle B$ = ______

c) En los triángulos *DEF* y *DGF* de la figura 4.5.5:

- $\overline{DF}$ = ______
- $\overline{EF}$ = ______
- $\measuredangle G$ = ______
- $\measuredangle E_1$ = ______
- $\measuredangle F_1$ = ______

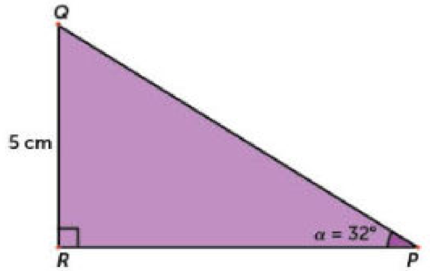


Fig. 4.5.3.

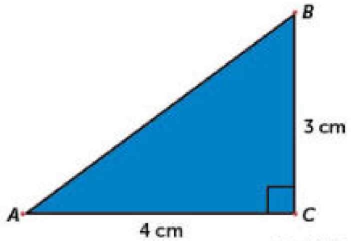


Fig. 4.5.4.

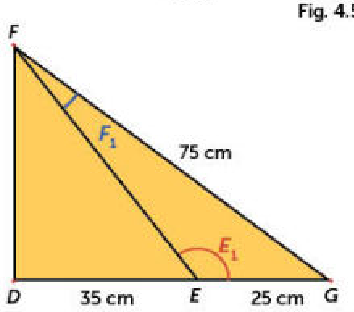


Fig. 4.5.5.

2 Comparen sus respuestas y procedimientos con los de dos parejas. Si encuentran algún error, determinen su causa y corríjanlo. Con apoyo de su profesor verifiquen sus resultados y analicen en cuáles de los siguientes casos es posible calcular todas las dimensiones de un triángulo rectángulo.

a) Se conoce el valor de dos de sus lados.
b) Se conoce el valor de dos de sus ángulos.
c) Se conoce el valor de un ángulo y un lado.

Reflexiona

1. En grupo, consideren sus definiciones de seno, coseno y tangente en el círculo unitario de la figura 4.5.6 y respondan lo siguiente.
   a) ¿Cuáles son los valores del seno y del coseno de 55°? ______
   b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto *C*? ______
   c) ¿Cómo varía el valor del seno conforme la medida del ángulo aumenta de 0° a 90°? ______
   d) ¿Y cómo varía el valor del coseno? ______
   e) ¿Cuáles son los signos del seno y el coseno de un ángulo mayor que 90° y menor que 180°? ______
   f) ¿El coseno de un ángulo mayor que 180° y menor que 270° es un número negativo o positivo? ¿Y el seno? ______
   g) ¿El seno de un ángulo mayor que 270° y menor que 360° es un número negativo o positivo? ¿Y el coseno? ______
   h) Verifiquen con su calculadora las respuestas.

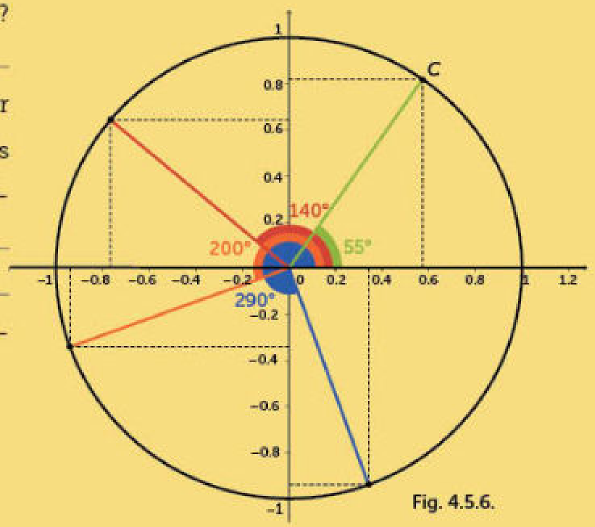


Fig. 4.5.6.

Regresa y revisa


Fig. 4.5.7.

1 En parejas, realicen y contesten en su cuaderno lo que se pide.
   a) Resuelvan de nuevo el problema de la situación inicial aplicando lo que aprendieron en esta lección. Compartan sus resultados para validarlos.
   b) Determinen cuánto mide la sección de la torre que se indica en la figura 4.5.7.
   c) La torre de Pisa, en Italia, es una construcción que se inclinó debido a la inestabilidad del suelo. Si se dejara caer una piedra desde la parte más alta del costado inclinado, caería a unos 3.9 m de la base. Si esta torre mide 56 m de alto, ¿cuál tiene mayor inclinación, la de Pisa o las KIO?

2 En grupo, comenten los procedimientos que usaron para resolver la actividad anterior.

Resuelve y practica

1. Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno. Justifica tus respuestas.
   a) Si la escalera de la figura 4.5.8 mide 6 m de largo, ¿a qué altura del muro llega?

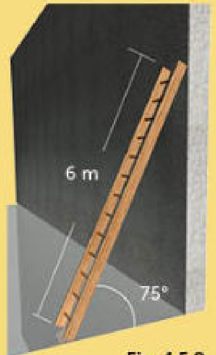


Fig. 4.5.8.

   b) Carlos soltó 100 m de cuerda para volar su cometa, como se ilustra en la figura 4.5.9. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

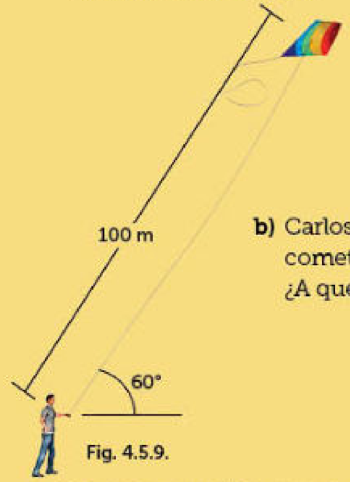


Fig. 4.5.9.

   c) Para levantar bloques de piedra maciza a 1 m de altura respecto al suelo, se requiere una rampa inclinada con un ángulo de 9° (figura 4.5.10). Calcula la longitud de la rampa.

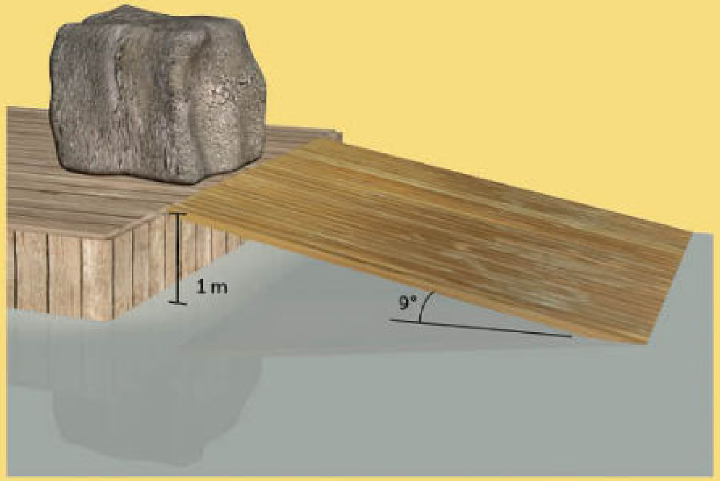


Fig. 4.5.10.

2. Responde en tu cuaderno y justifica tus respuestas.
   a) ¿Cuánto mide la apotema de un octágono regular que tiene 1 m por lado?
   b) ¿Es posible trazar un hexágono regular de 4 cm de lado y con 5 cm de apotema?
3. Calcula la tangente de los siguientes ángulos. Usa un círculo unitario y luego verifica tus resultados con una calculadora.

tan 140° = ______ tan 220° = ______ tan 310° = ______

6. La razón de cambio

Situación inicial

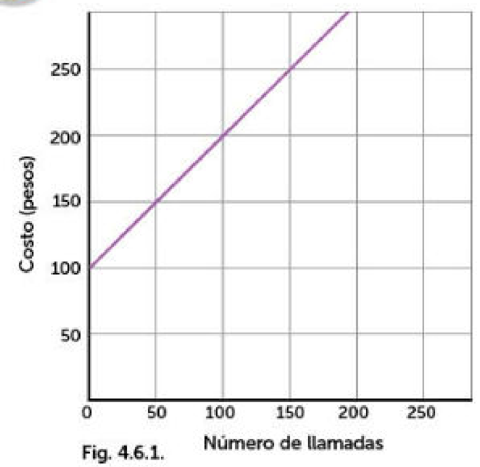


Fig. 4.6.1.

El mejor servicio telefónico

Para contratar un servicio telefónico, Félix consultó las tarifas de tres compañías.

I. La compañía Aries ofrece un plan en el que se pagan \$200.00 mensuales y 50¢ por cada llamada realizada.
II. La compañía Baramax cobra \$300.00 al mes y el servicio incluye llamadas ilimitadas.
III. El plan tarifario de la compañía Phono se muestra en la figura 4.6.1.

Si Félix realiza entre 210 y 280 llamadas cada mes, ¿qué compañía le conviene contratar? ¿Por qué?

Analiza

1. En parejas, realicen y respondan lo siguiente.
   a) Determinen el costo de cada llamada al contratar la compañía Phono. Expliquen su procedimiento y describan el plan que ofrece. ______________________
   b) ¿Cómo varía el costo por el servicio de telefonía en la compañía Baramax de acuerdo con el número de llamadas? ¿Por qué? ______________________
   c) Si Félix hiciera menos de 150 llamadas por mes, ¿cuál compañía le convendría? ¿Por qué? ______________________
   d) ¿Bajo qué condiciones le conviene a Félix contratar con la compañía Aries? Justifiquen su respuesta. ______________________
   e) Tracen las gráficas de las tres tarifas y argumenten en su cuaderno, qué plan le conviene a Félix.
2. En grupo, compartan sus respuestas y procedimientos y, con apoyo de su profesor verifiquen que sean correctos. Comenten cómo obtener el costo por llamada para cada compañía a partir de la gráfica.

Explora y construye

¿Cómo cambia una relación lineal?

1 En parejas, analicen la figura 4.6.2, la cual muestra la presión que se ejerce sobre un cuerpo, medida en atmósferas, conforme se sumerge en el mar. Contesten lo que se indica.

Fig. 4.6.2.

a) ¿La relación entre la profundidad del cuerpo y la presión que recibe es lineal o cuadrática? ¿Por qué? ______________________
b) ¿Cuánto varía la presión de 5 m a 10 m de profundidad? ______________________
c) ¿Y entre 10 m y 20 m? ______________________
d) ¿Qué presión se ejerce sobre un objeto a 50 m de profundidad? Justifiquen su respuesta. ______________________
e) Algunas ballenas azules nadan a 110 m de profundidad. ¿Cuánta presión soportan a esa profundidad? ______________________
f) ¿Cuánto varía la presión por cada metro que el cuerpo se sumerge? Expliquen cómo obtuvieron su respuesta. ______________________
g) ¿La manera en que varía la presión por cada metro que el cuerpo se sumerge es siempre la misma? ¿Cómo se relaciona su respuesta con la forma de la gráfica? ______________________

2 En grupo, comparen y discutan sus respuestas y procedimientos. Con apoyo del profesor, verifiquen que sean correctos.

En tus cursos anteriores de Matemáticas estudiaste que la relación entre dos magnitudes (x y y) que varían linealmente se puede representar con una ecuación de la forma $y = mx + b$, donde m y b son constantes. En esa ecuación, m corresponde a la *razón de cambio* y es el factor que determina qué tanto varía una de las magnitudes (y) conforme varía la otra (x).

3 En equipos, lean de nuevo la actividad 1 anterior y realicen lo que se solicita.

a) Determinen la razón de cambio en esa situación. __________

b) Obtengan la ecuación que representa la relación entre la profundidad del cuerpo y la presión que recibe. Describan su procedimiento. __________

4 En parejas, obtengan la razón de cambio entre las variables involucradas en cada situación. Expliquen el significado de la razón de cambio.

a) Un automóvil recorre 120 km en 2 h con rapidez constante. __________

b) Tere gastó la misma cantidad de dinero a la semana, durante 10 semanas. Al inicio tenía \$840.00 y ahora, \$40.00. __________

c) Un tinaco tenía 200 L de agua a los dos minutos de empezar a llenarlo y cuatro minutos después tenía 520 L. El flujo de agua fue constante. __________

d) Édgar hace al día la misma cantidad de pulseras. Hoy lunes tendrá seis pulseras y el domingo por la noche, 18. __________

e) La recta que representa la posición de un ciclista en función del tiempo en una gráfica, pasa por los puntos (0.5, 30) y (1, 55). __________

5 En grupo, comparen y comenten sus resultados y corrijan los errores que se presenten con apoyo de su profesor. Compartan su procedimiento para determinar la razón de cambio en cada situación.

Razón de cambio y pendiente de la recta

1 En parejas, analicen la figura 4.6.3, que muestra la cantidad de libros que tres amigos han leído hasta febrero. Supongan que los tres leen con ritmo constante. Respondan y realicen lo que se pide.

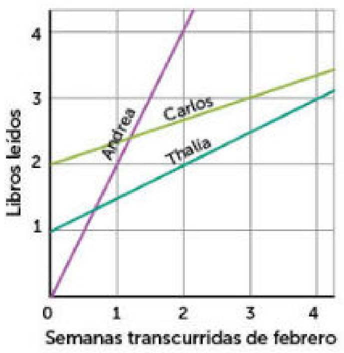


Fig. 4.6.3.

a) ¿Qué significa que las gráficas de los libros que han leído Carlos y Thalía no inicien en el origen? __________

b) Obtengan la razón de cambio de cada gráfica. Expliquen su procedimiento. __________

c) Determinen la expresión algebraica que representa cada gráfica e indiquen su pendiente. __________

d) ¿Qué relación observan entre la razón de cambio y la pendiente de cada recta? Anoten sus conclusiones. __________

e) Con base en la figura 4.6.3, ¿quién de los tres amigos lee más libros por semana? __________

f) ¿Cuál es la relación entre la inclinación de las gráficas y la razón de cambio? __________

2 Lean de nuevo los problemas de la actividad 4 de la página anterior, y realicen y respondan lo siguiente.

a) Tracen en su cuaderno la gráfica de cada situación. ¿Cuál tiene mayor inclinación? ¿Cuál menor? __________

b) Comparen la inclinación de cada recta con las razones de cambio. ¿Qué observan? __________

c) Calculen la pendiente de cada recta y compárenla con la inclinación y la razón de cambio de cada problema. Escriban una conclusión respecto a la relación de esos elementos. __________

d) ¿Cómo varía la pendiente de la recta conforme la razón de cambio aumenta? __________

e) ¿Y qué pasa con la pendiente de la recta si la razón de cambio disminuye? __________

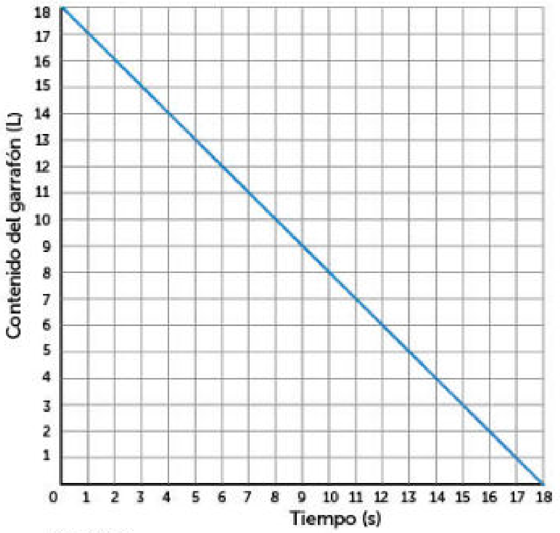


Fig. 4.6.4.

3 En grupo, comenten sus procedimientos y conclusiones. Analicen el porqué de los errores que se presenten y corríjanlos con apoyo de su profesor.

4 En parejas, analicen la gráfica de la figura 4.6.4, que muestra el tiempo que un garrafón tardó en vaciarse con un flujo constante, y contesten lo que se indica.

a) ¿Qué expresión algebraica modela la situación? ______

b) ¿Cuál es la razón de cambio del vaciado del garrafón? ______

c) ¿Qué signo tiene la razón de cambio? ______

d) ¿Cómo se representa en la gráfica el signo de la razón de cambio? ______

5 En grupo, comenten sus conclusiones y, con apoyo del profesor, verifiquen que sean correctas.

Toma nota

Localiza el término "razón de cambio" en el glosario (págs. 256-258); con tus propias palabras escribe su definición y un ejemplo.

Reflexiona

1. Analiza lo siguiente y responde.
   a) Considera la actividad 1 de la página anterior. ¿Es posible incluir el caso de un lector cuya razón de cambio sea negativa? ¿Por qué? ______
   b) ¿Es posible que en la misma actividad la razón de cambio sea cero? ¿Qué significa esa razón de cambio? ______
2. Comparte tus resultados con tus compañeros. Verifiquen que sean correctos con apoyo de su profesor.

Regresa y revisa

1 En parejas, revisen de nuevo el problema de la situación inicial y respondan en su cuaderno.

a) ¿Cuál es la razón de cambio del plan telefónico de cada empresa?

b) Si otra empresa ofrece un plan de $500.00 mensuales con 500 llamadas incluidas y cada llamada extra cuesta 10¢, ¿es posible obtener la razón de cambio de esa situación? ¿Por qué?

2 En grupo, verifiquen sus respuestas con apoyo de su profesor.

7. Desviación media

Situación inicial

¿Qué jugador elegir?

La tabla 4.7.1 muestra la cantidad de goles anotados por tres jugadoras de un club de futbol en cinco partidos. Si fueras el director técnico del equipo, ¿a cuál de ellas elegirías para la gran final si sólo pudieras optar por una de ellas? ¿Por qué?

	Jugadora		
Partido	Arely	Luz	Alma
Primero	1	5	2
Segundo	1	0	2
Tercero	6	0	2
Cuarto	1	0	2
Quinto	1	5	2

Tabla. 4.7.1.

Analiza

1. En parejas, respondan y realicen lo siguiente.
   a) ¿Cuál es el promedio de goles de cada jugadora? ______
   b) ¿Cuál es el rango de goles anotados por cada una? ______
   c) ¿Qué jugadora anotó más goles en un solo partido y quién anotó menos? ______
   d) Expliquen individualmente cuáles serían los mejores criterios para determinar qué jugadora conviene elegir. Justifiquen su respuesta. ______
   e) Compartan y comenten su respuesta con otra pareja. ¿Los criterios son los mismos o distintos? ¿Cuáles consideran más adecuados? ______
2. En grupo, comenten su elección. Justifiquen su respuesta y verifiquen, con apoyo de su profesor, que su argumentación sea correcta.

Explora y construye

La desviación media y el rango como medidas de dispersión

1 En parejas, analicen la tabla 4.7.2, que muestra las calificaciones de cuatro estudiantes en el tercer bimestre del ciclo escolar. Realicen y contesten lo que se pide.

	Estudiante							
	Jaime		Verónica		Rodrigo		Rebeca	
Asignatura	Calificación	Distancia al promedio	Calificación	Distancia al promedio	Calificación	Distancia al promedio	Calificación	Distancia al promedio
Biología	7		5		6		10	
Educación Física	9		9		9		7	
Español	8		10		10		8	
Física	5		10		6		9	
Formación Cívica y Ética	8		6		10		7	
Geografía	8		6		10		6	
Historia de México	10		9		10		8	
Historia Universal	9		10		7		8	
Matemáticas	8		10		6		10	
Química	8		5		6		7	
Promedio								

Tabla. 4.7.2.

a) Completen la tabla: primero calculen el promedio de calificaciones de cada estudiante; después obtengan la distancia entre la calificación de cada asignatura y el promedio que calcularon, y finalmente determinen el promedio de las distancias.

b) ¿Quién tuvo el mejor promedio? ______

c) ¿Qué promedio de distancias es mayor y cuál es menor? ______

d) ¿Cómo usarían el promedio de distancias para determinar quién fue más regular en sus calificaciones? Justifiquen su respuesta. ______

e) Compartan su respuesta con otra pareja y discutan qué significa el promedio de distancias. Anoten sus conclusiones. ______

2 En grupo, discutan sus conclusiones en plenaria. Comenten la utilidad de calcular el promedio de distancias para analizar datos proporcionados.

La *dispersión de un conjunto* de datos se refiere a qué tan distribuidos están esos datos en el conjunto, es decir, qué tan variables son.

Una manera de medir la dispersión de un conjunto de datos consiste en calcular la distancia entre cada dato y el promedio del conjunto, y después obtener el promedio de esas distancias.

Ese último promedio recibe el nombre de *desviación media* (o *desviación promedio*) y permite expresar en un solo valor la dispersión del conjunto, lo que facilita la comparación de la dispersión de datos entre varios conjuntos.

En la actividad 1 anterior, por ejemplo, la desviación media es el promedio de la columna "Distancia al promedio" para cada estudiante.

3 En parejas, completen la tabla 4.7.3, que registra la puntuación de cuatro participantes en una competencia de tiro con arco. Luego respondan y realicen lo que se pide.

	Participante				
Tiro	Paola	Andrea	Marcela	Roberta	Amira
Primero	7	10	10	9	8
Segundo	10	9	10	7	10
Tercero	9	9	7	7	10
Cuarto	9	8	7	9	9
Quinto	7	6		9	6
Promedio			8.4		
Desviación media					
Rango					

Tabla. 4.7.3.

a) De acuerdo con la desviación media, ¿cuáles son los resultados menos dispersos y los más dispersos? ______

b) ¿Y cuáles son los menos dispersos y los más dispersos de acuerdo con el rango? ______

c) Determinen qué participante fue más constante en su puntuación. Expliquen su respuesta. ______

d) ¿Qué criterio, la desviación media o el rango, considerarían para determinar quién fue menos constante? ¿Por qué? ______

e) En las competencias de tiro con arco el ganador es quien obtiene mejor promedio. ¿Quién ganó esa competencia? ______

f) ¿Consideran que el ganador fue el mejor tirador? ¿Por qué? ______

El rango de un conjunto de datos es otra manera de conocer la dispersión de dicho conjunto.

Toma nota

Localiza el término "desviación media" en el glosario (págs. 256-258); con tus propias palabras escribe su definición y un ejemplo.

Busca en...

www.edutics.mx/4ux donde encontrarás más información acerca de el rango y la desviación media. (Consulta: 20 de enero de 2019).

4 Reúnanse con otra pareja para compartir y discutir sus respuestas anteriores. Luego en equipos respondan.

a) ¿Cuántos valores de un conjunto de datos se necesitan para calcular su rango?

____

b) ¿Y cuántos para obtener su desviación media? ______________________________

c) ¿Cuál de los dos criterios anteriores consideran más útil para conocer la dispersión de un conjunto de datos? ¿Por qué? ______________________________

____

d) Consideren el siguiente conjunto de datos: 5, 6, 5, 4, 5, 4, 6, 12. ¿Qué medida de dispersión representa mejor la distribución de esos datos, el rango o la dispersión media? Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

5 En grupo, compartan sus respuestas y conclusiones anteriores. Verifiquen que sean correctas con apoyo de su profesor y corrijan los errores que se presenten.

La desviación media y la forma de su gráfica

1 En parejas, analicen las siguientes gráficas (figuras 4.7.1, 4.7.2 y 4.7.3) y la tabla 4.7.4. Luego realicen y contesten lo que se indica en la siguiente página.

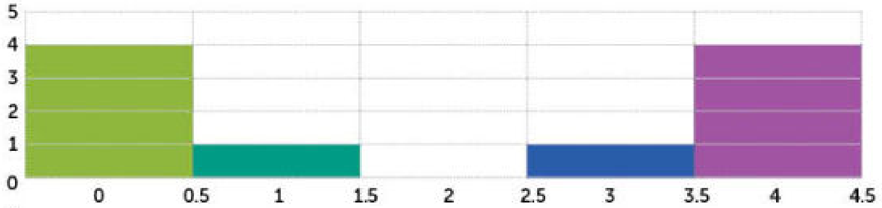


Fig. 4.7.1.

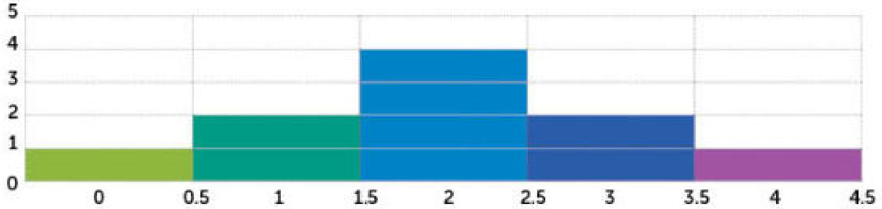


Fig. 4.7.2.

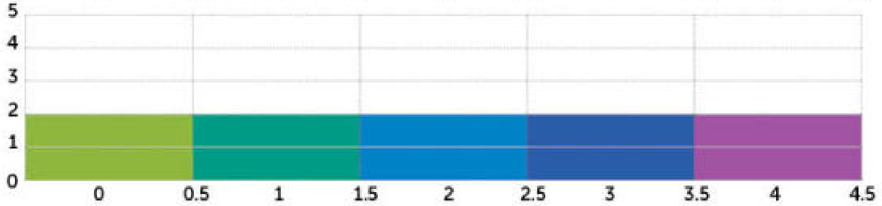


Fig. 4.7.3.

a) Completen individualmente la tabla 4.7.4.

Lista de datos	0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4	0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4	0, 0, 0, 0, 1, 3, 4, 4, 4, 4
Gráfica correspondiente	Fig.	Fig.	Fig.
Promedio			
Desviación media			

Tabla. 4.7.4.

b) ¿En qué intervalo se localiza el promedio de cada gráfica? ______________________________

c) ¿Cuál de las gráficas tiene forma uniforme, cuál de "\/" y cuál de "/\"? ______________________________

d) ¿Cuál gráfica representa mayor dispersión de datos? ¿Cuál menor? ¿Por qué?

____

e) Expliquen la relación entre la forma de la gráfica y su desviación media. Anoten sus conclusiones. ______________________________

____

2 En grupo, compartan, discutan y verifiquen sus conclusiones.

Reflexiona

1. Realiza y responde lo siguiente en tu cuaderno. Verifica tu respuesta en grupo.
   a) Anota tres ejemplos de conjuntos sólo con dos datos cada uno.
   b) Calcula el rango y la desviación media de cada conjunto.
   c) ¿Cuál es la relación entre el rango de cada conjunto y su desviación media?

Regresa y revisa

1 Lee de nuevo el problema de la situación inicial y calcula en tu cuaderno la desviación media para los datos de cada jugadora.

a) ¿Qué criterios consideraste para elegir a la mejor jugadora? ______________________________

____

b) ¿Cómo se relacionan las deviaciones medias con tu elección de la jugadora para la gran final? ______________________________

2 Sin hacer cálculos, ¿cuál de los siguientes casos tiene una desviación media mayor? Justifica tu respuesta en tu cuaderno.

Caso 1: Un jugador de basquetbol no anotó en los primeros tres partidos, anotó diez en el cuarto partido y diez en el quinto.
Caso 2: Un jugador anotó cuatro canastas en cada uno de los cinco partidos.

El torno y los sólidos de revolución

Fig. 4.A.1.

La figura 4.A.1 muestra un banco de madera. Obsérvalo bien; se trata de un objeto ordinario, salvo por un detalle: las piezas de madera con que se hizo han sido talladas o torneadas.

Tornear la madera es un arte, y construir muebles que además de funcionales sean bellos es una aspiración de la ebanistería, una especialización de la carpintería.

Fíjate en las formas de los soportes del banco. ¿Cómo te imaginas que se elaboraron?

La imagen 4.A.2. muestra tres piezas de madera torneada. Obsérvalas con atención.

Fig. 4.A.2.

¿Considerarías que estos objetos, y los soportes del banco de la figura 4.A.1, son sólidos de revolución? Argumenta tu respuesta.

En este bloque estudiaste qué son y cómo se generan los sólidos de revolución. Pudiste observarlos al girar los banderines de cartulina. Sin embargo, el método que empleaste para visualizar los sólidos de revolución puede llegar a ser difícil, porque para observarlos claramente es necesario que las figuras giren con rapidez, ya que son figuras planas. Resultaría mejor disponer de una imagen o modelo más cercano al sólido real, un modelo tridimensional.

Y eso es lo que harás a continuación: ¡construirás una esfera de papel!

1 Reúne el siguiente material: hojas de papel de colores (puedes usar hojas de reúso y lápices de colores), tijeras, compás, pegamento, un trozo de estambre y regla graduada.

2 Sigue las indicaciones.

- Traza 20 círculos del mismo diámetro; pueden ser de 5 cm de diámetro o del tamaño que tú elijas, sólo procura no desperdiciar demasiado papel.

- Recorta los círculos, dóblalos por la mitad y pégalos en pares, como se indica en la figura 4.A.3.

Fig. 4.A.3.

- Una vez que los diez pares de círculos estén listos, pégalos nuevamente dos a dos, y pega los semicírculos sobrantes del primero y último círculos.
- A lo largo del eje, donde se unen los dobleces de los círculos, pega el trozo de estambre, de modo que sobresalga una longitud suficiente para poder sujetarlo desde arriba y desde abajo. El estambre representa el eje de rotación de la esfera.
- Obtendrás algo similar a lo que se muestra en la figura 4.A.4.

Fig. 4.A.4.

¡Listo, ahora tienes un modelo de una esfera de revolución! Obsérvalo y responde lo siguiente.

a) ¿Qué ángulo hay entre cada par de semicírculos adyacentes en tu modelo? Explica tu respuesta.

b) ¿Qué importancia tiene el ángulo entre los semicírculos adyacentes para que tu modelo se asemeje a una esfera?

c) ¿Cómo mejorarías tu modelo? Explica.

d) ¿Cómo aplicarías este método pero para construir el modelo de un cilindro o de un cono de revolución?

- Es importante notar que la esfera, el cilindro y el cono son sólo casos particulares, ya que de cualquier generatriz que rote sobre un eje se pueden obtener sólidos de revolución.
- Discute con tus compañeros qué otros objetos que utilizan, o que han observado en su vida cotidiana, son sólidos de revolución. Mencionen al menos tres ejemplos.

Medición de la dispersión de conjuntos de datos

En esta actividad usarás una hoja de cálculo para determinar la dispersión de conjuntos de datos, para ello calcularás el promedio de las distancias de cada dato respecto a la media.

1 Abre una hoja de cálculo y haz lo siguiente.

- Elabora una tabla con cuatro columnas y 11 filas; en la primera columna coloca los nombres de las nueve asignaturas que cursas; en la segunda, tercera y cuarta, escribe tu nombre y el de dos de tus compañeros, con sus respectivas calificaciones para cada asignatura. En el encabezado de la tabla escribe el periodo al que corresponden esas calificaciones, como se observa en la figura 4.H.1.

	A	B	C	D
1	Enero - Febrero			
2	Asignatura	Francisco	Maribel	Armando
3	Español III	9	10	9
4	Inglés III	7	9	10
5	Matemáticas III	6	9	9
6	Ciencias III	7	10	9
7	Tecnología III	6	9	10
8	Historia II	8	8	9
9	Formación Cívica y Ética II	8	8	9
10	Educación Física II	9	8	10
11	Artes III	8	10	10
12				

Fig. 4.H.1.

- En la celda A12 escribe *Promedio* y en la parte inferior de cada columna de calificaciones calcula tu promedio y el de tus compañeros. Para ello selecciona las celdas B12, C12 y D12 y da clic en el triángulo que se encuentra a la derecha del botón *Autosuma*, del menú Inicio, en la sección *Modificar*; elige la opción *Promedio* (figura 4.H.2).

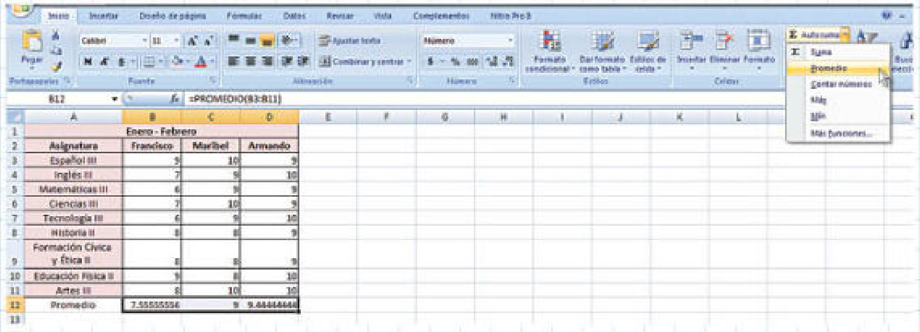


Fig. 4.H.2.

- En las celdas puede aparecer un promedio con varios decimales, pero si quieres un solo decimal selecciona las celdas de los promedios (B12, C12 y D12), haz clic en el botón secundario del ratón y elige la opción *Formato de celdas* (figura 4.H.3). Aparecerá un cuadro con el mismo nombre, selecciona la categoría *Número*. En el campo *Posiciones decimales* escribe el número 1 y oprime aceptar (figura 4.H.4).

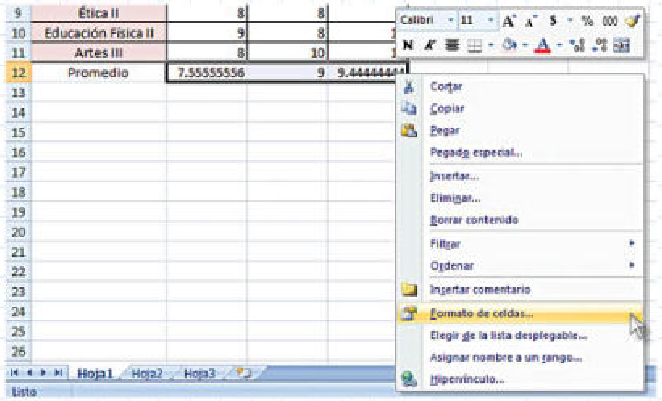


Fig. 4.H.3.

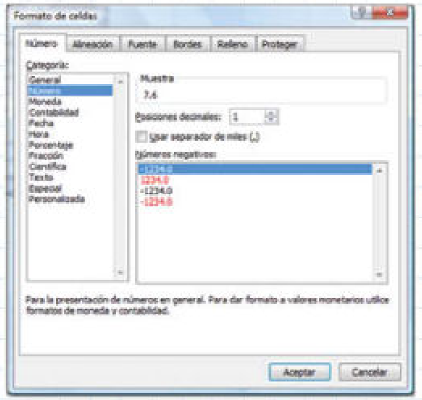


Fig. 4.H.4.

2 Ahora que tienes los promedios, calcula la desviación de cada calificación respecto al promedio, así como la desviación media de cada conjunto de datos.

- Copia toda la tabla, excepto las celdas de los promedios, y pégala en otro sitio dentro de la hoja de cálculo. Para eliminar los datos de las calificaciones selecciona las celdas correspondientes y oprime la tecla *Supr* del teclado.

- Cambia el encabezado de la nueva tabla por "Desviaciones" y en la celda que se encuentra debajo de la última asignatura escribe "Desviación media", como se muestra en la figura 4.H.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Enero - Febrero					Desviaciones			
2	Asignatura	Francisco	Maribel	Armando		Asignatura	Francisco	Maribel	Armando
3	Español III	9	10	9		Español III			
4	Inglés III	7	9	10		Inglés III			
5	Matemáticas III	6	9	9		Matemáticas III			
6	Ciencias III	7	10	9		Ciencias III			
7	Tecnología III	6	9	10		Tecnología III			
8	Historia II	8	8	9		Historia II			
9	Formación Cívica y Ética II	8	8	9		Formación Cívica y Ética II			
10	Educación Física II	9	8	10		Educación Física II			
11	Artes III	8	10	10		Artes III			
12	Promedio	7.6	9.0	9.4		Desviación media			
13									

Fig. 4.H.5.

- Para calcular la desviación media de cada calificación selecciona la celda del primer dato, en el ejemplo es la celda G3. Escribe la fórmula: =ABS(B3-$B$12) y oprime *entrar* (figura 4.H.6). (La función ABS aporta valores absolutos de los datos que incluye la fórmula y los signos $ son para que el valor entre ellos no se modifique).

F	G	H	I
Desviaciones			
Asignatura	Francisco	Maribel	Armando
Español III	=ABS(B3-$B$12)		
Inglés III			

Fig. 4.H.6.

- Ahora posiciona el cursor en la parte inferior derecha de la celda donde escribiste la fórmula y arrastra hacia abajo, hasta la celda del último dato (G11). Así obtendrás las desviaciones del primer conjunto de datos, observa la figura 4.H.7.

F	G	H	I
Desviaciones			
Asignatura	Francisco	Maribel	Armando
Español III	1.44		
Inglés III	0.56		
Matemáticas III	1.56		
Ciencias III	0.56		
Tecnología III	1.56		
Historia II	0.44		
Formación Cívica y Ética II	0.44		
Educación Física II	1.44		
Artes III	0.44		
Desviación media			

Fig. 4.H.7.

- Repite el procedimiento para los otros conjuntos de datos, pero asegúrate que la primera celda de cada conjunto incluya su propio promedio fijo; es decir, para el ejemplo de Maribel la fórmula será =ABS(C3-$C$12) y para Armando =ABS(D13-$D$12).
- Ahora calcula la desviación media, utiliza la función *Promedio* del botón *Autosuma*, igual que como lo hiciste con el promedio de la primera tabla.

F	G	H	I
Desviaciones			
Asignatura	Francisco	Maribel	Armando
Español III	1.44	1.00	0.44
Inglés III	0.56	0.00	0.56
Matemáticas III	1.56	0.00	0.44
Ciencias III	0.56	1.00	0.44
Tecnología III	1.56	0.00	0.56
Historia II	0.44	1.00	0.44
Formación Cívica y Ética II	0.44	1.00	0.44
Educación Física II	1.44	1.00	0.56
Artes III	0.44	1.00	0.56
Desviación media	0.94	0.67	0.49

Fig. 4.H.8.

- Redondea los datos a dos decimales seleccionando todos los datos, incluso los de la desviación media, y da clic con el botón secundario del ratón, pero esta vez, en el campo *Posiciones decimales* del cuadro *Formato de celdas*, escribe el número 2. Obtendrás una tabla similar a la de la figura 4.H.8.

3 Reúnete con un compañero, comparen sus resultados y respondan.

a) ¿Cómo son las desviaciones de las calificaciones respecto al promedio de cada uno de los conjuntos de datos?

b) ¿Cuáles son los resultados más dispersos y los menos dispersos, de acuerdo con la desviación media?

c) ¿Quién fue el estudiante más constante en sus calificaciones?

4 Construye otra tabla de datos, esta vez con las calificaciones que has obtenido hasta ahora. Con tus resultados tendrás un panorama general de tu desempeño escolar.

1 Lee cada uno de los siguientes enunciados.

2 Señala si es falso (F) o verdadero (V).

3 Explica cómo verificarías tu respuesta.

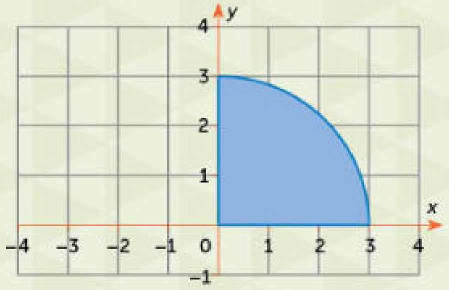
Enunciado	F	V	Propuesta de verificación
a) La sucesión 2, 6, 12, 20, 30, 42,... se define por la expresión algebraica $n(n - 1)$.			
b) Los círculos que componen el desarrollo plano de un cilindro pueden tener distinta área.			
c) La tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es igual al cateto adyacente entre el cateto opuesto.			
d) El coseno y el seno de un ángulo de 90° están definidos, pero no así la tangente del mismo ángulo.			
e) A medida que un ángulo aumenta de 0° a 90°, el valor del coseno disminuye.			
f) En una recta que representa una relación lineal, conforme aumenta la pendiente también se incrementa la razón de cambio.			
g) Si la desviación media de dos conjuntos de datos es la misma, entonces el rango de los conjuntos también es igual.			

4 En la página 209 podrás revisar cuáles enunciados son falsos y cuáles, verdaderos. Examina en tu libro los temas de las respuestas erróneas; de ser necesario, replantea tus propuestas de verificación y aplícalas.

1 ¿Cuál es la expresión algebraica que define el enésimo término de la sucesión 3, 7, 13, 21, 31,...?

a) $n^2 + 3n - 1$
b) $n^2 - n + 3$
c) $n^2 + 2n - 2$
d) $n^2 + n + 1$

2 ¿Qué sólido de revolución se obtiene al girar la siguiente figura respecto a ambos ejes?

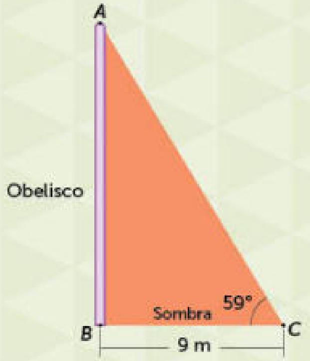


a) Un cilindro.
b) Un cono.
c) Una semiesfera.
d) Una esfera.

3 Los ángulos agudos α y β pertenecen a un triángulo rectángulo *ABC*. Si tan α = 0.75, ¿cuánto vale sen β? Puedes usar calculadora.

a) 0.60
b) 0.80
c) 1.33
d) 1.66

4 A cierta hora del día un obelisco proyecta una sombra que termina a 9 m de la base y forma un ángulo de 59° respecto al suelo, como ilustra la figura. ¿Qué razón trigonométrica permite calcular la altura del obelisco?



a) sen *C*
b) cos *B*
c) tan *C*
d) tan *B*

5 ¿Cuál de los siguientes conjuntos de números tiene menor desviación media?

a) 10, 11, 12, 13
b) 22, 21, 26, 22
c) 4, 6, 8, 16
d) 30, 29, 31, 31

1 Analiza la sucesión 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,... y responde.

a) ¿Cuáles son los tres números que continúan la sucesión? ____________

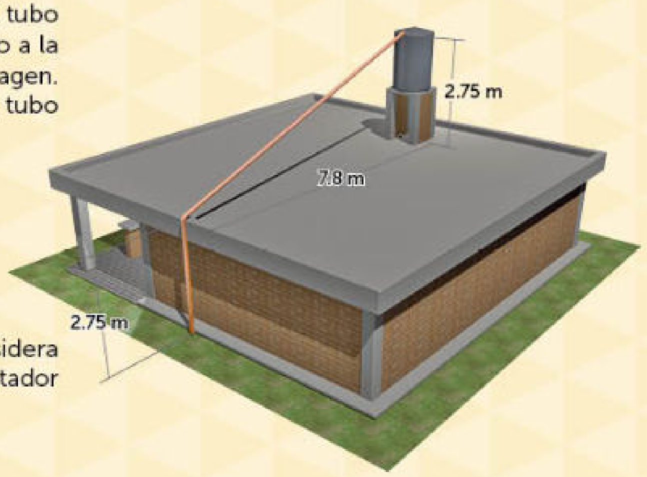
b) ¿Qué regla define la sucesión?

• $n\frac{n+1}{n}$ • $n^2 + n$ • $n^2 - n$ • $n\frac{n+1}{2}$

c) ¿Qué número se localiza en la posición 998? ____________

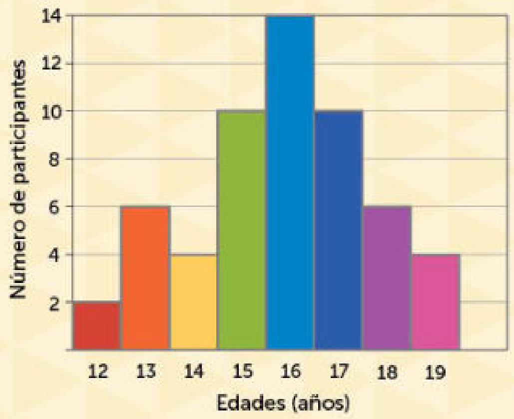
2 Un plomero necesita conectar un tubo de cobre a un depósito de agua. Para ello debe doblar el tubo vertical que viene de la planta baja y dirigirlo a la parte superior del tinaco, como muestra la imagen.

a) ¿Cuánto medirá el ángulo que formará el tubo doblado con la azotea?



b) ¿Cuál es la longitud total del tubo? Considera que en la orilla del tinaco se colocará el flotador y la salida para el agua.

3 La gráfica indica el número de participantes de un grupo de danza según sus edades. Observa los datos y responde.



a) ¿Cuál es el rango del grupo? ____________

b) ¿Qué pasaría con el rango si ingresaran al grupo 10 alumnos más de 14 años? ____________

____

c) ¿Cuál es la desviación media de las edades de los participantes y qué significa ese valor?

____

____

Respuestas de la autoevaluación de la página 207. Enunciados falsos: a), b), c), g); enunciados verdaderos: d) e) f).

A

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Bloque 5

C

Contenidos

Sentido numérico y pensamiento algebraico

- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

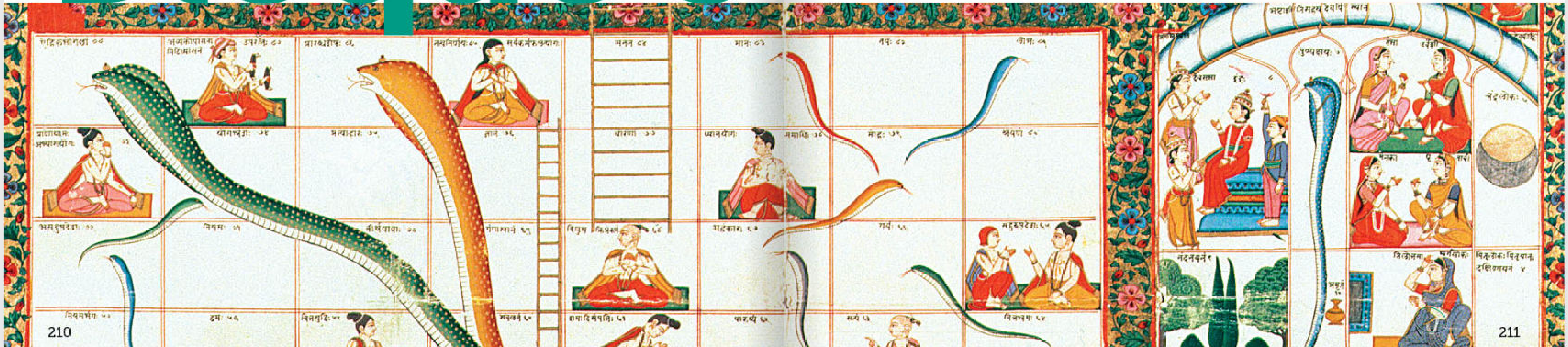
Forma, espacio y medida

- Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.
- Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.
- Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Manejo de la información

- Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.
- Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Serpientes y escaleras es un antiguo juego hindú en cuyas casillas se representan vicios y virtudes humanas con un sentido moral de premiación y terribles consecuencias. Generalmente se juega con dados que indican el número de casillas que avanza cada jugador, por lo que es un juego de azar, sujeto a las leyes de la probabilidad.



1. Ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones

Situación inicial

El paseo en lancha

Durante su paseo en lancha por el cañón del Sumidero, en Chiapas, Itzel recorrió en tres horas 15 km de ida y 15 km de regreso. La rapidez del río era de 2 km/h. Si la rapidez de la lancha, sin considerar la corriente del río, es siempre la misma, ¿cuánto duró el trayecto de ida y cuánto el de regreso? Considera que sólo de ida la corriente del río tenía la misma dirección que la de la lancha.

Analiza

1 En equipos, resuelvan el problema anterior. Luego realicen lo siguiente.

a) Describan su procedimiento. ______

______

______

______

b) ¿Cómo pueden comprobar si su resultado es correcto? Realicen la comprobación.

______

______

c) Compartan su procedimiento con el de otro equipo. Analícenlos y determinen si son correctos. Si no obtuvieron resultados satisfactorios, analicen y expongan sus dificultades.

2. En grupo, respondan y hagan lo que se indica.

a) ¿Con qué expresión o expresiones algebraicas podrían representar la situación?

______

______

b) Las soluciones a las expresiones algebraicas que propusieron, ¿son soluciones del problema? Compruébenlo. ______

______

______

Explora y construye

Todo problema tiene solución

1 En parejas, analicen los problemas, planteen una ecuación que los represente y resuélvanlos.

a) Durante un partido de basquetbol, en el que cada periodo dura 12 min, un jugador anotó 12 puntos en el primer periodo, 10 en el segundo y 12 en el tercero. Si al final del encuentro tuvo un promedio de 10 puntos por periodo, ¿cuántos puntos anotó en el cuarto?

b) A cada uno de los ocho integrantes de una excursión se les pidió que, por cada porción de comida, llevaran dos porciones de agua. Si la excursión duró cuatro días y en total consumieron 96 porciones de agua, ¿cuántas porciones de comida consumió al día cada integrante?

c) Al finalizar el partido de basquetbol del inciso a), otro jugador, que sólo participó en los primeros tres periodos, obtuvo un promedio de medio punto por cada minuto de juego. Si durante el primer periodo anotó seis puntos y en el segundo no anotó, ¿cuál fue su promedio por minuto en el tercer periodo?

2 Comparen sus resultados y procedimientos con los de otra pareja. Con apoyo de su profesor, verifiquen que las ecuaciones que plantearon sean correctas, discutan y corrijan los errores que se presenten.

3 En parejas, representen cada enunciado con una ecuación, resuélvanla y anoten los resultados posibles.

a) El producto de un número y su sucesor es igual al mismo número más cuatro.

b) El cuadrado de un número es igual a menos uno.

c) El producto del sucesor y el antecesor de un número es igual a cero.

d) El cuadrado de un número es igual a tres veces él mismo.

e) El cuadrado de un número multiplicado por 25 es igual a menos 20 veces la resta del mismo número y cuatro.

4 En parejas, analicen las siguientes situaciones. Expresen cada una con una ecuación, determinen cuántas soluciones tiene y cuál es la respuesta del problema.

a) El largo de una mesa es tres veces mayor que el ancho. Si la superficie de la mesa es de 4 800 cm^2, ¿cuánto mide de largo y ancho?

b) Diana compró tres estampas cuadradas. Dos son del mismo tamaño y la superficie de la tercera es dos tercios la superficie de las otras dos juntas. Si las superficies de las tres suman 96 cm^2, ¿cuánto mide de lado cada estampa?

c) Dos manteles circulares juntos tienen una superficie de 1.413 m^2. Si el diámetro de uno es el doble que el del otro, ¿cuánto mide el radio de cada mantel?

5 Compartan sus resultados y procedimientos con los de otra pareja y comenten cómo resolvieron cada problema. Con apoyo de su profesor verifiquen que las respuestas sean correctas y corrijan cuando se requiera.

6 En parejas, resuelvan los siguientes problemas y argumenten sus respuestas. Tracen en su cuaderno una gráfica que represente la situación cuando lo consideren necesario.

a) Dos sillas y una mesa cuestan $1 050.00, y seis sillas y una mesa, del mismo precio que las anteriores, $1 850.00. ¿Cuánto cuesta cada silla y cada mesa?

b) Por dos platos de fruta y dos jugos de naranja se pagan $43.00, mientras que por tres platos de fruta y tres jugos de naranja, $64.50. ¿Cuánto cuesta un plato de fruta?

c) Una tienda de ropa vende una playera y un pantalón a $160.00, así como tres playeras y tres pantalones a $240.00. ¿Cuánto cuesta cada playera?

d) En un terreno rectangular de 900 m de perímetro, la longitud del largo es el doble que la del ancho. Si cada metro cuadrado se vende a $250.00, ¿cuál es el valor del terreno?

e) En los dos primeros servicios del día de un taxista la tarifa se estableció por el número de kilómetros recorridos y el banderazo. El taxímetro marcó $38.72 por los 7 km que viajó el primer cliente y $34.44 por los 6 km del segundo servicio. ¿Cuánto cuestan el banderazo y cada kilómetro de recorrido?

f) Un gimnasio ofrece varios tipos de membresías. La membresía A consiste de un pago único mensual de $800.00, y la B, de un pago mensual de $100.00 y $30.00 por cada día que se asiste. ¿Con cuántas asistencias el costo de las dos membresías se igualará y de cuánto será?

g) La membresía C del gimnasio anterior requiere un pago mensual de \$300.00 y \$20.00 por cada asistencia. ¿En qué momento el costo de las membresía A y C se igualarán y de cuánto será su costo?

h) ¿En qué momento el costo de las membresías B y C se igualará y cuál será su costo?

7 En grupo, comparen sus resultados y procedimientos para resolver cada problema. Con apoyo de su profesor, verifiquen sus respuestas y argumentos.

Primero la ecuación, después el problema

1 En equipos de cuatro integrantes, realicen lo que se indica.

a) Por parejas escriban seis problemas que se resuelvan con las siguientes ecuaciones o sistemas de ecuaciones, uno para cada caso.

- $6t - 2 = 0$ ______
- $10ñ + 18 = 11$ ______
- $a^2 + 6a = -9$ ______
- $(2b + 3)(3b - 3) = 0$ ______
- $\begin{cases} 3u + w = 11 \\ 5u - w = 13 \end{cases}$ ______
- $\begin{cases} m - n = 8 \\ m + n = 5 \end{cases}$ ______

b) Intercambien sus problemas con los de la otra pareja de su equipo.
c) Corroboren la coherencia de los problemas de la otra pareja. En caso de que no sean coherentes, discútanlos entre los cuatro y corríjanlos.
d) Resuelvan en sus cuadernos los problemas de la otra pareja. Si alguno no se resuelve con las ecuaciones propuestas coméntenlo y replantéenlo.
e) Validen en equipo sus resultados.

2 En grupo, expongan en el pizarrón dos problemas por equipo para resolverlos en plenaria. Con apoyo de su profesor, verifiquen que sean correctos.

Primero el problema, después la ecuación

1 En parejas, planteen las ecuaciones que representan los siguientes problemas y resuélvanlas. Expliquen su procedimiento.

a) Un prisma cuadrangular tiene una superficie lateral de 1 143 cm² y su altura es tres veces mayor que la longitud del lado de su base. ¿Cuál es la medida de su altura? ¿Cuánto mide el lado de su base?

- Y si el prisma fuera cuatro veces más alto que ancho y tuviera la misma superficie, ¿cuáles serían sus medidas?

b) El área de dos rectángulos es igual, pero uno tiene dos unidades más de largo y dos menos de ancho que el otro. Si los perímetros de los rectángulos suman 80 cm, ¿cuáles son las dimensiones de cada rectángulo?

2 En grupo, compartan y comenten sus resultados y procedimientos. Corrijan los errores con apoyo de su profesor.

Reflexiona

1. En grupo, analicen y discutan lo que se plantea.
Los sistemas de ecuaciones con tres ecuaciones y tres incógnitas se llaman sistemas de ecuaciones 3 × 3. ¿Cómo podrían resolver el problema de la situación inicial con un sistema de ecuaciones 3 × 3?

Regresa y revisa

1 En parejas, respondan en su cuaderno la siguiente variante de la situación inicial.

a) Si la rapidez del río fuera de 7 km/h durante el trayecto de ida y, por un cambio repentino debido a un deslave, fuera de 2 km/h durante el de regreso, ¿cuál sería la duración del trayecto de ida y cuál la del regreso?

2. Cortes en cilindros y conos

Situación inicial

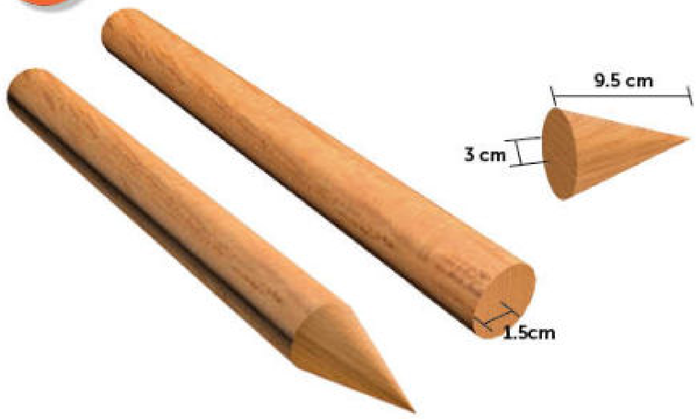


Fig. 5.2.1.

La misma cara

Carlos necesita una lanza de madera para una obra plástica de su clase de Artes Visuales. Para hacerla tiene un cono de madera y un palo cilíndrico, cuyas medidas se muestran en la figura 5.2.1. Si colocará el cono en un extremo del palo de madera, ¿a qué altura del cono debe hacer un corte paralelo a su base para obtener la punta de la lanza? El diámetro de la base debe ser igual al diámetro del palo de madera.

Analiza

1 En parejas, respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.

a) ¿A qué figura plana corresponde la base del cilindro de madera?

b) ¿Y la del cono?

c) ¿Qué figura se obtiene en la sección transversal del cono al hacerle un corte paralelo a su base?

d) ¿Cómo varía el diámetro de la sección transversal del cono en relación con la altura a la que se hace el corte?

Explora y construye

Cortes en un cilindro

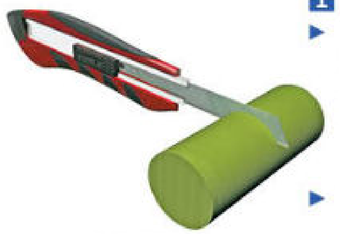


Fig. 5.2.2.

1 En equipos, realicen la siguiente actividad.

- Cada uno moldee con plastilina un cilindro de aproximadamente 5 cm de altura y 2 cm de radio.

a) ¿Qué figura geométrica se obtendría en la sección del cilindro si se le hiciera un corte paralelo a la base? ______

- Con cuidado para no lastimarse, o lastimar a sus compañeros, con un cúter hagan un corte paralelo a la base de su cilindro para verificar su respuesta.

b) Si hicieran otros cortes paralelos a la base, ¿obtendrían la misma figura?

______

c) Comparen las figuras planas que resultaron al hacer el corte en los cilindros. ¿Todas tienen la misma forma y las mismas medidas? ______

______

- Moldeen otros cilindros.

d) ¿Qué figura geométrica se obtendrá en la sección transversal si hacen un corte perpendicular a la base del cilindro? ______

- Cada uno haga un corte perpendicular a la base de su cilindro y verifiquen su respuesta anterior.

e) ¿Qué figura plana se formó en cada cilindro? ______

f) ¿Todas tienen la misma forma y las mismas medidas? ______

______

- Moldeen otros cilindros y corten cada uno de manera inclinada de modo que el cúter inicie en una base y termine en la base opuesta.

g) ¿Qué figuras piensan que obtendrán? ______

- Comparen las figuras planas que obtuvieron y respondan.

h) ¿Qué figura plana se formó en cada cilindro? Descríbanla. ______

______

i) ¿Todas tienen la misma forma y las mismas medidas? ______

______

- Moldeen más cilindros y cada uno haga un corte inclinado sin tocar las bases.

j) ¿Qué figura piensan que resultará en este caso? ______

k) ¿Qué figura plana se formó en cada cilindro? Descríbanla con detalle. ______

______

l) ¿En qué se parecen y en qué difieren las figuras que obtuvieron? ______

______

2 En grupo, hagan y respondan lo siguiente.

a) Dibujen la figura que resulta al hacer cada corte a un cilindro.

Corte paralelo a la base	Corte perpendicular a la base	Corte inclinado que pase por las bases	Corte inclinado sin tocar las bases

b) ¿En qué tipo de corte siempre se obtiene una figura igual a la base? ______

c) ¿En qué parte del cilindro debe hacerse un corte perpendicular a la base para obtener el rectángulo de mayor área? ______

d) ¿Es posible hacer un corte en un cilindro para que la figura plana obtenida sea un triángulo? ¿Por qué? ______

Cortes en un cono

1 En equipos, moldeen con plastilina cuatro conos de aproximadamente 6 cm de altura y 2 cm de radio.

a) Discutan qué figuras se obtendrán en las secciones transversales al hacer un corte...

- paralelo a la base. ______
- paralelo a la generatriz. ______
- inclinado sin pasar por la base. ______
- que pase por la base pero que no sea paralelo a la generatriz. ______

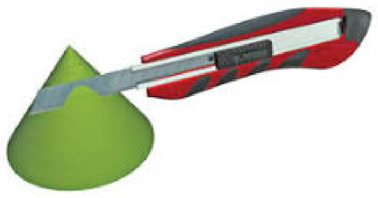


Fig. 5.2.3.

b) Realicen los cortes y dibujen las figuras que obtuvieron. Descríbanlas detalladamente en su cuaderno. Verifiquen sus respuestas anteriores.

Corte paralelo a la base	Corte paralelo a la generatriz	Corte inclinado sin pasar por la base	Corte que pase por la base, pero no sea paralelo a la generatriz

2 En grupo, lean la definición y respondan.

Las figuras planas que se forman al cortar un cono con un plano, así como los contornos de estas figuras, reciben el nombre de *secciones cónicas* o simplemente *cónicas*. La figura 5.2.4 muestra las distintas cónicas que se generan a partir de los cortes en un cono.

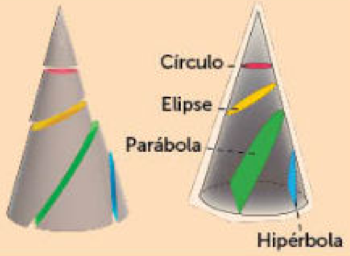


Fig. 5.2.4.

a) ¿Cómo se llama la cónica que se obtiene al hacer un corte paralelo a la base? ______

b) ¿Cómo se debe realizar el corte en un cono para que en vez de obtener una cónica resulte un triángulo isósceles? ______

3 Compartan sus respuestas con el grupo y valídenlas con apoyo de su profesor.

La medida de los cortes

1 En parejas, construyan con plastilina un cono de 10 cm de altura y 5 cm de radio. Hagan un corte a 2 cm de la base que sea paralelo a ésta y respondan.

a) Una de las figuras que obtuvieron es un cono. ¿Cuál es su altura? ______

b) ¿Cuánto mide el radio de su base? ______

Busca en...

www.edutics.mx/4uf donde podrás observar parábolas que se generan al cortar de un modo particular un cono. (Consulta: 20 de enero de 2019).

2 A partir del cono que obtuvieron hagan otro corte paralelo a su base también a 2 cm de ésta.

a) ¿Cuál es la altura del nuevo cono? ______

b) ¿Cuánto mide su radio? ______

3 Repitan los pasos anteriores siempre haciendo un corte a 2 cm de la base del último cono que obtuvieron y completen la tabla.

Cono	Altura (cm)	Radio de la base (cm)
1	10	5
2		
3		
4		
5		

Tabla. 5.2.1.

a) ¿Qué relación existe entre la altura de cada cono y la medida del radio de su base? ______

b) ¿Cómo obtendrían la medida del radio de la base de cada cono a partir de su altura? ______

4 Observen la figura 5.2.5 y respondan.

a) ¿Cómo son entre sí los triángulos *ABC* y *ADE*? ______

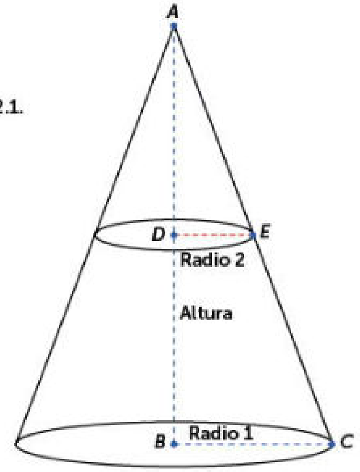


Fig. 5.2.5.

b) Escriban una relación que se puede establecer entre los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Justifiquen su respuesta.

_______ = _______

c) A partir de esa igualdad escriban una ecuación para obtener el radio de la base de un cono en términos de su altura. ____________

5 Comparen su respuesta al inciso anterior con la de la actividad 3. ¿Qué semejanzas y diferencias encuentran? ¿Ambas son correctas? ¿Por qué? ____________

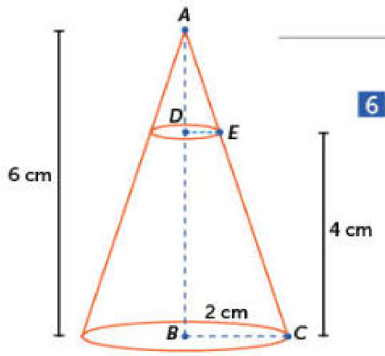


Fig. 5.2.6.

6 En grupo, verifiquen que sus respuestas sean correctas y realicen lo siguiente.

a) Observen la figura 5.2.6. Calculen el radio del cono que resulta al hacer un corte paralelo a la base que pase por *E*. Expliquen su procedimiento.

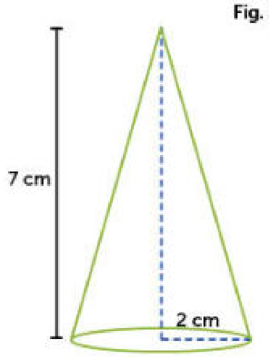


Fig. 5.2.7.

b) Obtengan la altura a la que se debe hacer el corte en el cono de la figura 5.2.7 para que el radio del cono que resulte sea de 0.75 cm.

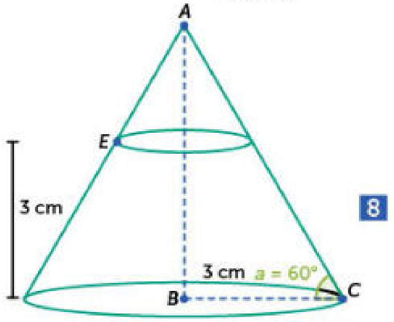


Fig. 5.2.8.

7 En equipos, observen el cono de la figura 5.2.8 y calculen el radio de la sección transversal que se obtiene al hacer un corte paralelo a la base que pase por el punto *E*.

8 En grupo, un miembro de cada equipo explique el procedimiento que siguieron para obtener la respuesta. Propongan un criterio para verificarlo y para comprobar que su resultado sea correcto. Una vez validado resuelvan el siguiente problema.

a) Calculen el radio del cono que se obtuvo al hacer un corte a 4 cm de la base de un cono cuya altura era de 12 cm y su directriz formaba un ángulo de 45° con el radio de la base.

Reflexiona

1. Observa las gráficas de la figura 5.2.9. Cada una representa la relación entre la altura a la que se hace un corte paralelo a la base de un cono y de un cilindro, y el radio de la base del nuevo cono o cilindro. Explica a qué gráfica pertenece cada cuerpo geométrico y justifica tu respuesta en tu cuaderno.

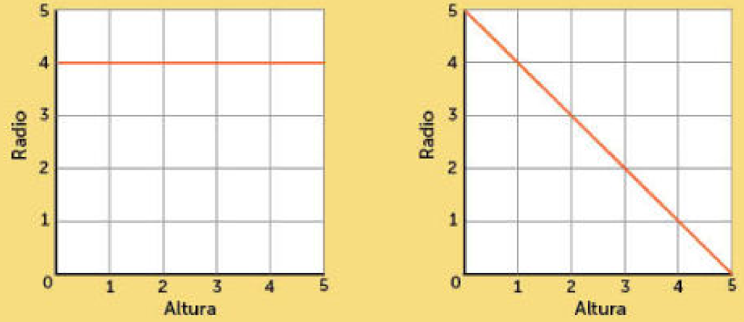


Fig. 5.2.9.

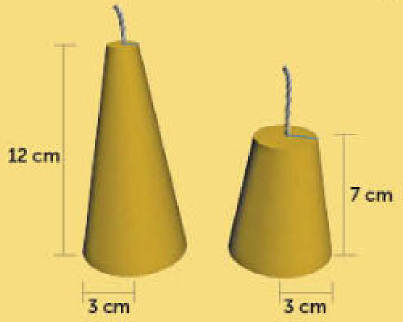
Regresa y revisa

1 En tu cuaderno resuelve de nuevo el problema de la situación inicial aplicando lo que aprendiste en esta lección. Compara este resultado con el que antes obtuviste. Si encuentras diferencias explica la razón.

Resuelve y practica

1. Al cortar un cono con un plano paralelo a su base se obtienen dos sólidos nuevos: uno es un cono y el otro recibe el nombre de *cono truncado*. Los siguientes conos truncados se obtuvieron a partir de velas aromáticas en forma de cono con una altura de 15 cm y un radio de 3 cm. Calcula el valor del segmento azul en cada uno.

____



____

Fig. 5.2.10.

3. El espacio que ocupan cilindros y conos

Situación inicial

El precio de un rollo de sushi

En un restaurante de comida japonesa se venden rollos y conos de sushi, como los de la figura 5.3.1. Si un rollo y un cono tienen el mismo largo, el mismo radio de base y el precio de uno es proporcional al del otro, de acuerdo con la cantidad de sushi que contienen, ¿cuánto cuesta el rollo, si el cono tiene un precio de $18.00? Justifica tu respuesta.

Fig. 5.3.1.

Analiza

1. En parejas, realicen lo que se indica.

a) Anoten primero de manera individual su procedimiento para obtener la respuesta.

____

____

b) Comparen sus respuestas con otras parejas y valídenlas de acuerdo con sus argumentos. Escriban sus conclusiones. ______________________

____

c) En cursos anteriores aprendieron a calcular el volumen de prismas y pirámides. Indiquen los procedimientos que usaron. ______________________

____

d) ¿Cuál es la relación entre el volumen del rollo y el del cono de sushi? Expliquen cómo comprobar su respuesta. ______________________

____

2. En grupo, compartan sus respuestas con las de otra pareja y verifiquen que sean correctas con apoyo de su profesor.

Explora y construye

Volumen de un cilindro y de un cono

1 En parejas, calculen el volumen de los siguientes prismas regulares y, en cada caso anoten su procedimiento. Luego respondan y realicen lo que se pide.

a)

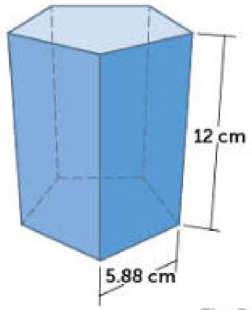


Fig. 5.3.2.

$V =$ ______________

b)

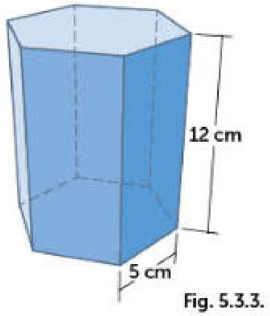


Fig. 5.3.3.

$V =$ ______________

c)

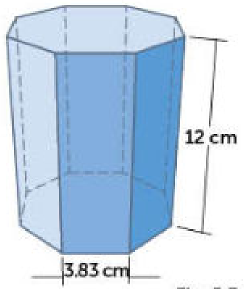


Fig. 5.3.4.

$V =$ ______________

d) ¿Cuál fue el procedimiento general para determinar el volumen de los prismas? ______________________

____

____

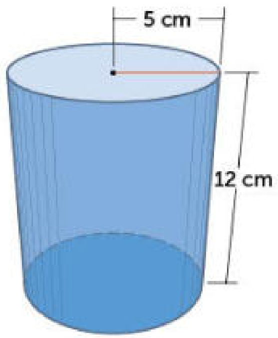


Fig. 5.3.5.

2 Analicen el cilindro de la figura 5.3.5 y respondan lo que se indica.

a) ¿Qué similitudes y diferencias observan entre los prismas anteriores y el cilindro? ______________________

____

b) Obtengan el volumen del cilindro.

c) ¿Cuál fue su procedimiento para obtenerlo? ______________________

____

d) Con base en sus respuestas anteriores, escriban una fórmula para calcular el volumen de un cilindro de r unidades de radio y h unidades de altura.

$V =$ ______________ u^3

3 Compartan sus procedimientos, resultados y fórmula con otra pareja. Verifiquen que sean correctos con apoyo de su profesor.

4 En parejas, obtengan el volumen de las siguientes pirámides regulares y, en cada caso, anoten su procedimiento. A continuación respondan y realicen lo que se pide.

•

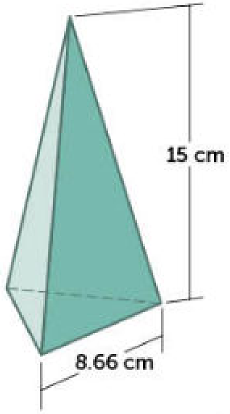


Fig. 5.3.6.

$V =$ ______________________

•

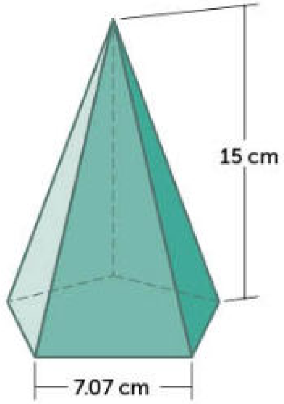


Fig. 5.3.7.

$V =$ ______________________

•

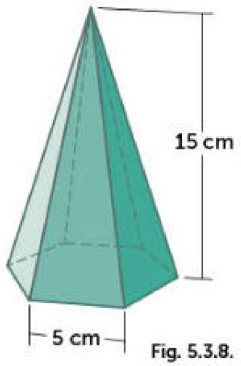


Fig. 5.3.8.

$V =$ ______________________

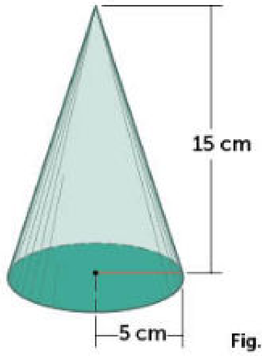


Fig. 5.3.9.

a) ¿Qué similitudes y diferencias hay entre las pirámides anteriores y el cono de la figura 5.3.9? ______________________

____

b) Determinen el volumen del cono.

c) A partir de sus respuestas, escriban una fórmula para calcular el volumen de un cono de r unidades de radio y h unidades de altura.

$V =$ ______________ u^3

5 En grupo, comparen la fórmula y, con apoyo de su profesor, corroboren que sea correcta.

Relación entre el volumen de un cilindro y el de un cono

1 Responde lo siguiente.

a) ¿Qué relación hay entre el volumen de un prisma y el de una pirámide que tienen la misma altura e igual base? ______________________

____

b) ¿Cómo supones que se relaciona el volumen de un cono con el de un cilindro si ambos tienen la misma base e igual altura? Argumenta tu respuesta. ______

____

c) Comparte tu conclusión con un compañero. Si no coinciden, expliquen el porqué de las diferencias. Argumenten si sus respuestas son correctas o no.

____

____

2 En equipos, consigan una cartulina, cinta adhesiva o pegamento, tijeras y lentejas o alguna semilla pequeña. Luego realicen y respondan en su cuaderno lo siguiente.

- Elijan un valor para el radio y uno para la altura de un cilindro; consideren valores suficientemente grandes para trazar su desarrollo plano.
- Tracen en la cartulina el desarrollo plano del cilindro; no olviden las pestañas necesarias para armarlo.
- Tracen el desarrollo plano de un cono con la misma altura e igual base que el cilindro; incluyan sus pestañas. Hagan en su cuaderno los cálculos que requieran.
- Armen los dos cuerpos, pero dejen abierta una base del cilindro y la base del cono.
- Llenen a ras el cono con las semillas que consiguieron (si el material es comestible, guárdenlo al terminar la actividad para lavarlo y consumirlo posteriormente).
- Vacíen el contenido del cono en el cilindro.
- Rellenen el cono y vacíen de nuevo su contenido en el cilindro.
- Repitan el procedimiento hasta que el cilindro esté lleno por completo.

a) ¿Cuántas veces debieron vaciar el contenido del cono para llenar el cilindro?
b) ¿Su respuesta es la misma que la del inciso b) de la actividad anterior? Si son distintas, expliquen las causas.
c) ¿Cómo se puede calcular el volumen de un cono a partir del volumen de un cilindro con igual base y la misma altura?

3 En grupo, compartan sus resultados con otro equipo. Con apoyo de su profesor, verifiquen que sean correctos y corrijan los errores que se presenten.

Reflexiona

1. Considera un cilindro y un cono cuyas alturas y bases son iguales, y responde. Justifica tus respuestas y compáralas con las de un compañero. Con apoyo de su profesor asegúrense de que sean correctas.
   a) ¿Cómo modificarías la altura del cono para que su volumen fuera igual al del cilindro? ______
   b) ¿Cómo modificarías la altura del cono para que tuviera el doble de volumen que el del cilindro? ______
   c) ¿Cómo modificarías el radio del cono para que tuviera igual volumen que el del cilindro? ______

Regresa y revisa

1 Retoma la situación inicial y responde.

a) Si el rollo y el cono de sushi tienen 12 cm de largo y sus bases, 2 cm de radio, ¿cuál es el volumen de cada uno? ______

4. Volumen de cilindros y conos

Situación inicial

Aerógrafos

Mariana necesita un aerógrafo para trabajar en su taller de restauración. En una tienda encontró los modelos que se ilustran en las figuras 5.4.1 y 5.4.2, ambos del mismo precio. El contenedor del aerógrafo de la izquierda es de forma cilíndrica, y el de la derecha está compuesto por un cilindro y un cono truncado, cuyas medidas se muestran en las imágenes. Si Mariana quiere el contenedor con mayor capacidad, ¿cuál debe comprar?

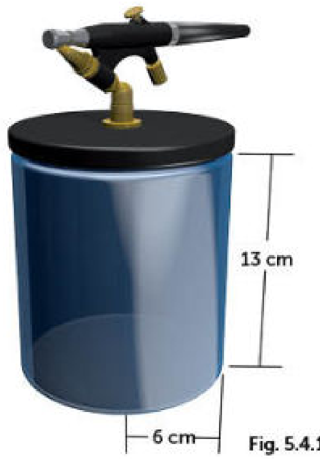


Fig. 5.4.1.

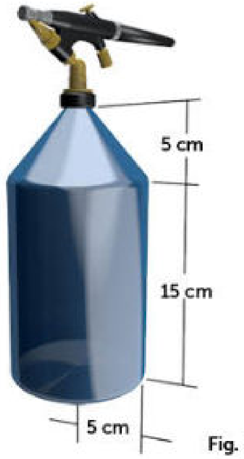


Fig. 5.4.2.

Analiza

1. En parejas, analicen el problema y respondan en su cuaderno.
   a) Estimen qué contenedor tiene mayor capacidad.
   b) Expliquen cómo determinar la capacidad de cada contenedor.
2. Compartan su procedimiento con otra pareja; respondan y realicen lo siguiente.
   La parte cónica del aerógrafo de la figura 5.4.2 es un cono truncado, como muestra la figura 5.4.3.
   a) Calculen la capacidad de cada contenedor de la actividad inicial. ¿Qué tan cercana estuvo su estimación?

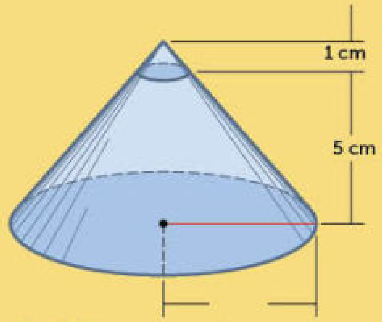


Fig. 5.4.3.

Explora y construye

Estimación y cálculo del volumen de conos y cilindros

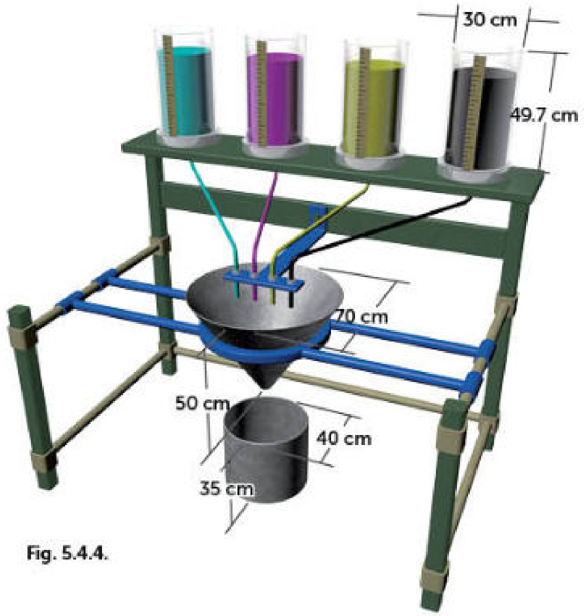


Fig. 5.4.4.

1 En parejas, analicen la figura 5.4.4, que muestra una máquina para mezclar pintura. Realicen y respondan lo que se pide.

a) Estimen mentalmente cuántos litros de pintura caben en cada contenedor y describan su procedimiento. ______

2 Comparen su respuesta con la de otra pareja y realicen lo siguiente.

a) Calculen el volumen de cada contenedor con las medidas que indica la figura y compárenlo con sus estimaciones. Pueden usar calculadora.

b) ¿Consideran que sus aproximaciones son adecuadas? Si no es así, expliquen la razón. ______

3 En grupo, compartan sus respuestas y discutan sus procedimientos. Si el procedimiento de una pareja permitió una estimación más aproximada, explíquenla ante el grupo.

4 En parejas, respondan con base en la máquina de la figura 5.4.4.

a) Consideren que el mezclador es un cono truncado, originalmente de 0.55 m de altura. Estimen mentalmente su volumen y anoten su procedimiento. ______

b) Si los contenedores están llenos de pintura y ésta se dejara caer en el mezclador cerrado, ¿la pintura se derramaría? ¿Por qué? ______

c) ¿Qué tanta pintura se derramaría o qué tanto espacio quedaría libre en el mezclador? ______

d) Obtengan el volumen exacto del mezclador y analicen qué tan acertadas fueron sus estimaciones; pueden usar calculadora.

e) Compartan sus respuestas con otra pareja. ¿Alguna estimación fue mejor que las demás? ¿Por qué? ______

f) Comenten la utilidad de hacer estimaciones y en qué circunstancias son más convenientes. Anoten sus conclusiones. ______

5 En grupo, compartan sus estimaciones y conclusiones. Comenten la utilidad de hacer estimaciones mentales para calcular el volumen de cilindros y conos.

6 En la figura 5.4.5 se muestran los contenedores de la máquina mezcladora, donde se indica la cantidad de pintura que contienen en relación con su volumen total. En parejas, realicen lo siguiente.

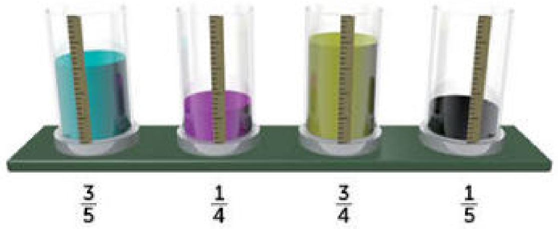


Fig. 5.4.5.

a) Estimen cuántos litros de pintura hay en cada contenedor y cuántos en los cuatro juntos. Anoten su procedimiento. ______

b) Calculen la cantidad exacta de pintura en cada contendor; pueden utilizar calculadora.

c) ¿La pintura de todos los contenedores se derramará en el recipiente metálico de la figura 5.4.4 después de pasar por el mezclador? Hagan una estimación y después corroboren sus resultados con una calculadora.

7 En grupo, compartan sus respuestas y comenten sus procedimientos. Verifiquen que sean correctos y corrijan los errores que se presenten con apoyo de su profesor.

8 El primer cilindro de la figura 5.4.6 es de plastilina. Realiza y responde lo que se indica.

a) Estima qué cuerpos de la figura 5.4.6 se pueden formar con la plastilina del cilindro. Anota el procedimiento en tu cuaderno.

b) Comparte con un compañero tus estrategias. Calculen el volumen de cada cuerpo para corroborar sus estimaciones.

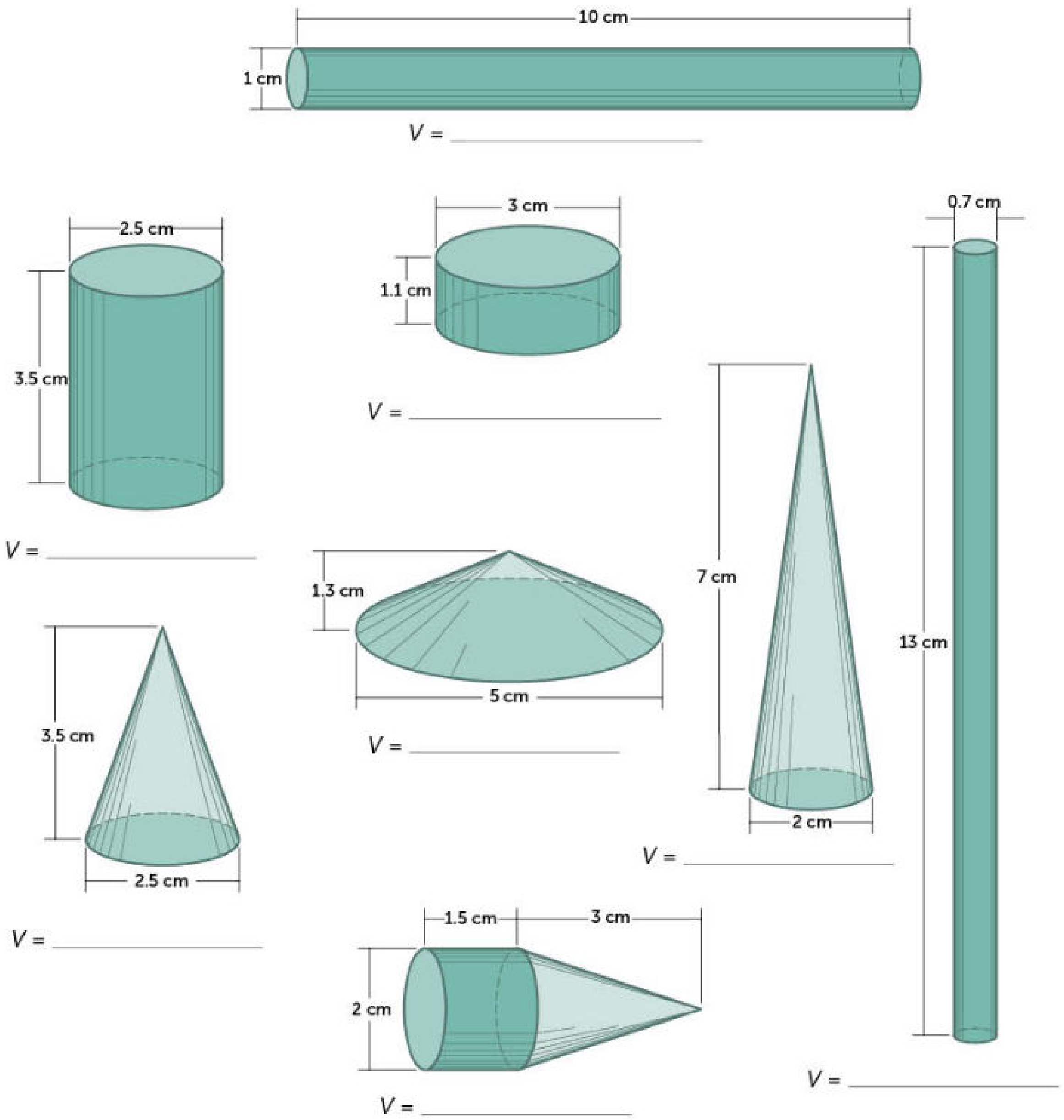


Fig. 5.4.6.

9 En grupo, contrasten sus estrategias. ¿Consideran que alguna es mejor? ¿Por qué? Verifiquen sus argumentos con apoyo de su profesor.

Problemas con volúmenes de cilindros y conos

1 En parejas, consideren de nuevo la figura 5.4.4. Lean y contesten lo siguiente.

Dos contenedores están llenos de pintura que se mezclará y verterá en otro recipiente metálico.

a) Si el recipiente tiene 30 cm de radio, ¿cuál debe ser su mínima altura para que la pintura no se derrame? Expliquen su procedimiento. ______

b) ¿Y cuál debe ser su altura si el radio es de r centímetros? Justifiquen su respuesta. ______

c) Determinen la mínima altura del recipiente para que no se derrame pintura si su base tuviera los siguientes radios.

- Radio de 15 cm. ______
- Radio de 20 cm. ______
- Radio de 30 cm. ______

d) Si la altura del recipiente es de h centímetros, ¿cuál debe ser su radio para que no se derrame pintura? ______

2 Compartan con otra pareja sus respuestas y discutan cómo verificar que sean correctas. Después analicen y respondan lo siguiente.

Supongan que los contenedores tienen las medidas de la figura 5.4.7 y que están llenos.

a) ¿Cuánta pintura contendrá cada uno? ______

b) Consideren que el mezclador es un cono completo, en vez de uno truncado, y que en él se vacía la pintura de los cuatro contenedores. Si éste tiene 40 cm de radio, ¿cuál debe ser su mínima altura para que la pintura no se derrame? ¿Por qué? ______

c) Y si su altura es de 60 cm, ¿cuánto debe medir su radio? ______

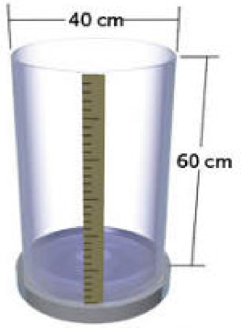


Fig. 5.4.7.

3 Expresa el volumen (V), la altura (h) y el radio (r) de un cono y de un cilindro, en términos de las otras variables involucradas en las fórmulas correspondientes para calcular sus volúmenes.

a) $V_{cilindro}$ = ______ b) $h_{cilindro}$ = ______ c) $r_{cilindro}$ = ______

d) V_{cono} = ______ e) h_{cono} = ______ f) r_{cono} = ______

4 En grupo, compara tus respuestas. Comenten los errores que se presenten, expliquen a qué se deben y corríjanlos con apoyo de su profesor.

5 En parejas, realicen lo que a continuación se indica.

a) Inventen dos problemas: uno de ustedes escribirá uno que implique calcular el volumen de un cilindro, o una de las variables involucradas en la fórmula para calcular su volumen, y el otro hará lo mismo pero para un cono.

b) Anoten el problema a continuación. ______________________________

c) Intercambien el problema con su pareja y resuélvanlos de manera independiente.

d) Verifiquen que las respuestas de su compañero sean correctas. Discutan y corrijan los errores.

Fig. 5.4.8.

Cilindros y conos con la misma base

1 En parejas, analicen la siguiente situación. Realicen y contesten lo que se pide.

Una empresa fabrica silos industriales, como el de la figura 5.4.8, uniendo secciones cilíndricas y cónicas, todas de 1 m de diámetro, pero de distintas alturas, como se indica en la tabla 5.4.1.

a) Completen la tabla.

	Sección cilíndrica 		Sección cónica 		
Modelo	Altura (m)	Volumen (m^3)	Altura (m)	Volumen (m^3)	Volumen total del silo (m^3)
1	0.5		0.25		
2	1		0.5		
3	1.5		0.75		
4	2.5		1		
5	3		1.25		
6	3.5		1.50		
7	4		1.75		
8	4.5		2		

Tabla 5.4.1.

b) ¿Qué tipo de relación hay entre la altura de la sección cilíndrica y su volumen? ¿Por qué? ______________________________

c) ¿Cuál es la relación entre la altura de la sección cónica y su volumen? Argumenten su respuesta. ______________________________

d) A partir de la tabla 5.4.1 tracen en el plano de la figura 5.4.9 la gráfica que representa la relación entre la altura de la sección cilíndrica y su volumen, así como la gráfica correspondiente a la sección cónica.

e) ¿Su respuesta de los incisos b) y c) se refleja en la forma de las gráficas? ¿Por qué? De no ser así, expliquen las causas. ______________________________

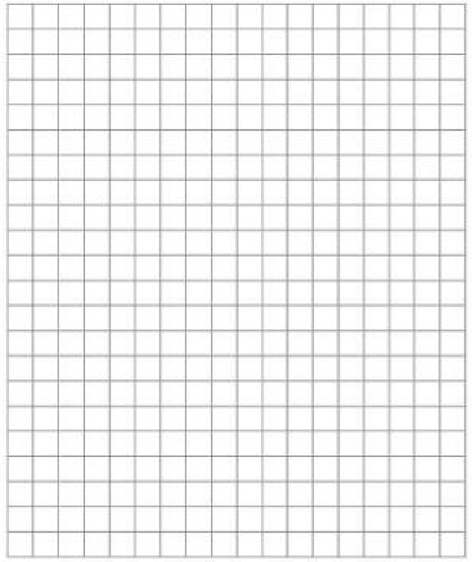


Fig. 5.4.9.

2 Comenten sus conclusiones con otra pareja. Analicen los errores que se presenten y corríjanlos con apoyo de su profesor.

Reflexiona

1. Considera la situación anterior y responde.

   a) Si en vez del diámetro, la altura de las secciones cilíndricas y cónicas fuera constante, ¿la relación entre el área de la base y el volumen sería proporcional? Argumenta tu respuesta. ______________________________

   b) ¿Qué tipo de relación existe entre el radio y el volumen de un cilindro? ¿Y entre el radio y el volumen de un cono? Justifica tu respuesta. ______________________________

2. En grupo, comparen y verifiquen sus respuestas. Corrijan los errores que se presenten.

Regresa y revisa

1 Lee nuevamente el problema de la situación inicial y responde.

a) ¿Cuál tendría que ser la altura del cilindro del aerógrafo de la figura 5.4.1 para que su volumen fuera la mitad del actual? Justifica tu respuesta. ______________________________

b) ¿Cuánto debería medir el radio para que su volumen sea el doble del actual? ¿Por qué? ______________________________

5. Situaciones de variación lineal y cuadrática

Situación inicial

Misma dirección, distinta rapidez

Dos automóviles inician su recorrido en la misma carretera, al mismo tiempo y en la misma dirección, pero desde distintos lugares. En la figura 5.5.1 se indica la rapidez con la que se desplaza cada uno y la distancia entre ellos al iniciar su recorrido. Si su rapidez es constante, ¿en cuánto tiempo el automóvil azul alcanzará al rojo?

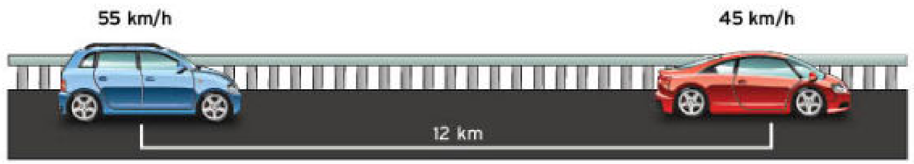


Fig. 5.5.1.

Analiza

1. En parejas, realicen lo siguiente.
   - a) Anoten su procedimiento para obtener la respuesta. ______
   - b) Compartan sus resultados y procedimientos con los de otra pareja y determinen si son correctos. Justifiquen sus respuestas. ______
   - c) Cuando la rapidez de un cuerpo es constante, ¿qué expresión relaciona la distancia recorrida con el tiempo transcurrido? ______
   - d) ¿Qué tipo de gráfica corresponde al movimiento de los autos? ¿Por qué? ______
   - e) ¿Qué característica distingue a una gráfica que corresponde con una escuación de primer grado? ______
   - f) ¿Cómo es la gráfica de una ecuación cuadrática? ______

Explora y construye

Relaciones con variación lineal y con variación cuadrática

1 En parejas, analicen las siguientes situaciones y contesten lo que se pide.

a) En una tienda de electrodomésticos se obtiene una ganancia de 25% respecto al precio de venta de cada producto.

- Anoten una expresión algebraica que relacione la ganancia con el precio de venta. ______
- ¿La relación entre esas variables es lineal o cuadrática? Justifiquen su respuesta. ______
- ¿Cuál es la ganancia por la venta de un reproductor DVD de $568.00? ______
- Si por la venta de un televisor, la tienda gana $1 200.00, ¿cuál es su precio de venta? ______
- ¿Cuál debe ser el precio de venta de un microcomponente si el costo de fabricación que pagó la tienda fue de $2 400.00? ______

b) Una diseñadora de páginas de internet cobra $250.00 de base por cada proyecto más $130.00 por cada hora de trabajo.

- ¿Qué expresión algebraica relaciona la cantidad del dinero que recibe en términos del tiempo de trabajo? ______
- ¿La expresión representa una variación lineal o cuadrática? ¿Por qué? ______
- ¿Cuánto ganó si trabajó 18 horas en un proyecto? ______
- ¿Cuántas horas debe trabajar para recibir $1 940.00? Justifiquen su respuesta. ______

2 En grupo, compartan y comenten sus procedimientos y resultados con otra pareja. Determinen si los procedimientos son correctos y corríjanlos si es necesario. A continuación analicen la siguiente situación y contesten.

a) La diseñadora de páginas de Internet quiere comprar un producto por el que la tienda de electrodomésticos ganará $777.50.

- ¿Cuántas horas debe trabajar en un proyecto para obtener el dinero suficiente para comprar el producto? ______
- Escriban una expresión algebraica que relacione el tiempo de trabajo de la diseñadora con la ganancia de la tienda. ______

3 En equipos, analicen la figura 5.5.2, que ilustra la distancia que recorrió un automóvil en tres segundos, y realicen lo que se pide.

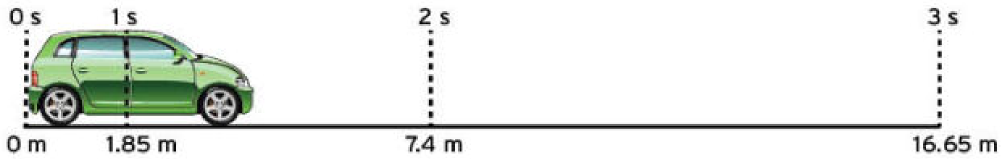


Fig. 5.5.2.

a) Expliquen si la relación entre la distancia y el tiempo es o no lineal. ______

______

b) Completen la siguiente tabla.

Tabla 5.5.1.

Distancia recorrida (m)	Tiempo (s)	Cuadrado del tiempo (s^2)	$\frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Cuadrado del tiempo}}$ $\left(\frac{m}{s^2}\right)$
1.85	1		
		4	
	3		

- Analicen los resultados del cociente de $\frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Cuadrado del tiempo}}$ para cada par de datos. ¿Qué observan? ______

______

- ¿A qué concepto físico corresponde ese cociente? ______

c) ¿Cuál de las siguientes expresiones relaciona la distancia que recorre el automóvil y el tiempo transcurrido? ¿Por qué? ______

______

- $d = t^2 + 1.85$
- $t^2 = 1.85d - 2$
- $d = 2.85t^2 - 1$
- $d = 1.85t^2$

d) ¿Qué distancia recorre el automóvil en 10 s?

e) ¿En cuánto tiempo recorre 312.65 m?

4 En grupo, compartan sus procedimientos y resultados. Corrijan los errores que se presenten con apoyo de su profesor y determinen qué problemas de esta sección corresponden a relaciones de proporcionalidad directa. Justifiquen su respuesta.

Gráficas de variaciones lineales y cuadráticas

1 En parejas, observen la figura 5.5.3 que muestra las equivalencias entre las escalas de temperatura Fahrenheit, Celsius y Kelvin. Contesten y realicen lo que se indica.

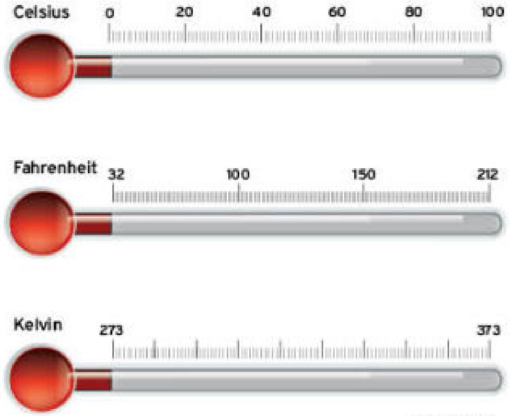


Fig. 5.5.3.

a) ¿A cuántos grados Fahrenheit se congela el agua? ______

b) ¿Y a cuántos hierve? ______

c) ¿A cuántos kelvin se presentan los fenómenos mencionados en los incisos anteriores?

______

d) Tracen una gráfica que represente la relación entre las escalas Fahrenheit y Celsius, y otra que exprese la relación entre las escalas kelvin y Celsius.

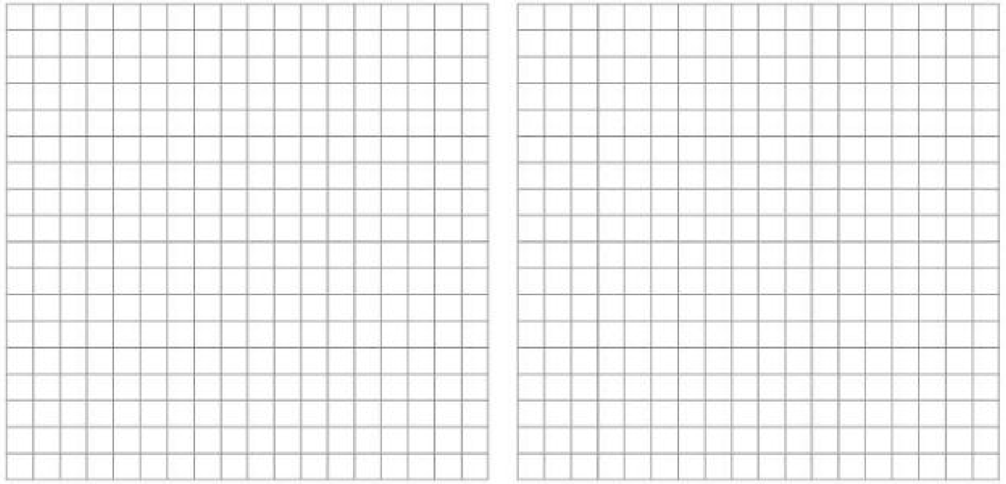


Fig. 5.5.4.

e) Obtengan la pendiente y la ordenada al origen de la gráfica que relaciona los grados Fahrenheit con los grados Celsius. ______

f) ¿Qué expresión algebraica representa la relación entre esas dos escalas de temperatura? ______

g) Indiquen el valor de la pendiente y de la ordenada al origen de la recta que relaciona los kelvin con los grados Celsius. ______

h) Determinen la expresión algebraica que relaciona las dos escalas anteriores.

______

i) ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 50 °C? ______

j) ¿A cuántos kelvin corresponden 70 °C? ______

2 En equipos, analicen la tabla 5.5.2, donde se registra la altura de una pelota de golf respecto al tiempo transcurrido después de golpearla. Realicen y contesten lo que se pide.

a) Tracen la gráfica correspondiente en el plano cartesiano de la figura 5.5.5.

Tiempo (s)	Altura (m)
0	0
0.5	6.13
1	9.8
1.5	11.03
2	9.8
2.5	6.13
3	0

Tabla 5.5.2.

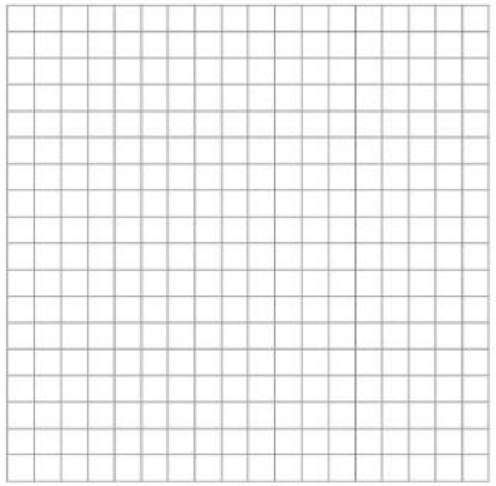


Fig. 5.5.5.

b) ¿La gráfica representa una variación lineal o cuadrática? Justifiquen su respuesta. ______________________

c) ¿Cuál fue la altura máxima de la pelota y cuándo la alcanzó?

d) ¿Cuál es la ecuación que en este caso relaciona la altura y el tiempo? ¿Por qué? ______________________

- $h = 4.9t^2 + 14.7t$
- $h = 4.9t^2 - 14.7t$
- $h = -4.9t^2 + 14.7t$

e) ¿Qué altura alcanzó la pelota a los 0.75 s?

f) ¿En qué momento llegó a una altura de 10 m? ______________________

3 Compartan sus resultados con los de otro equipo y corrijan los errores que se presenten.

4 En grupo, comenten sus procedimientos y resultados. Analicen los errores con apoyo de su profesor.

5 En parejas, relacionen cada gráfica con la expresión algebraica o tabla correspondiente. Justifiquen su respuesta.

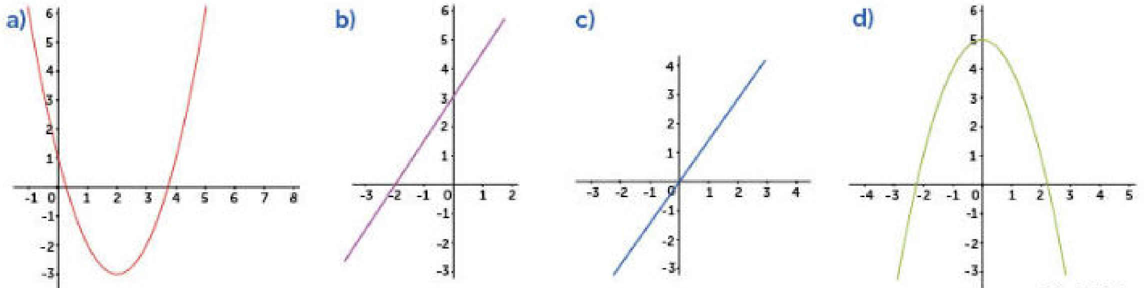


Fig. 5.5.6.

$y = \frac{5}{3}x$ (   )

$y = (x-2)^2 - 3$ (   )

(   )

x	y
−3	−1.5
−2	0
−1	1.5
0	3
1	4.5
2	6
3	7.5

Tabla 5.5.3.

(   )

x	y
−3	−4
−2	1
−1	4
0	5
1	4
2	1
3	−4

Tabla 5.5.4.

- Escriban un procedimiento algebraico para obtener los valores de x donde la gráfica de la función $y = (x-2)^2 - 3$ interseca al eje horizontal.

____

____

- Anoten un procedimiento algebraico para obtener los valores de y donde la gráfica de la función $y = (x-2)^2 - 3$ interseca al eje vertical. ______________________

____

Reflexiona

1. Analiza la siguiente situación y determina si se trata de una variación lineal o cuadrática. Justifica la respuesta en tu cuaderno.
   a) A presión constante un gas ocupa un volumen de 81 cm³ y aumenta 1 cm³ por cada aumento de temperatura de 2° C.
2. Contrasta con un compañero tu respuesta y asegúrense de que sea correcta.

Regresa y revisa

1 En parejas, resuelvan en su cuaderno la siguiente variante del problema de la situación inicial.

a) Si el automóvil azul fuera en dirección contraria al rojo, ¿en cuánto tiempo habría entre ellos 237 km de distancia? Justifiquen su respuesta.

6. Juegos de azar justos e injustos

Situación inicial

Un participante y "la casa"

En un juego de feria, el participante coloca la cantidad de fichas que desea sobre un número del 1 al 6 en un tablero como el de la figura 5.6.1. El encargado del juego, quien representa a "la casa", lanza dos dados cúbicos numerados del 1 al 6. Si el número que eligió el participante no aparece en la cara superior de los dados, "la casa" se queda con las fichas, pero si aparece en un dado, "la casa" duplica la cantidad de fichas, es decir, la cantidad de fichas que colocó el participante más una cantidad igual. Si el número aparece en los dos dados, la casa triplica la cantidad.
¿El juego es justo o alguno tiene ventaja? ¿Por qué?

1	2	3	4	5	6

Fig. 5.6.1

Analiza

1. En equipos de cuatro integrantes, comenten y discutan si el juego es o no justo. Argumenten sus respuestas.
2. Consigan dos dados cúbicos numerados del 1 al 6 y 20 fichas (pueden ser semillas, piedritas o pedazos de papel) para jugar como se indica. Luego contesten lo que se pide.
   - Divídanse en parejas: una jugará como el participante y la otra, como "la casa". Cada una tendrá 10 fichas.
   - Utilicen el tablero de la figura 5.6.1 para jugar hasta que una pareja gane todas las fichas. Recuerden que la pareja que representa al participante coloca tantas fichas como desee y la casa lanza los dados.

   a) Comparen sus resultados con otros equipos. ¿Qué pareja ganó más veces, la que jugó como el participante o como "la casa"? ______

   b) ¿El resultado anterior es consistente con su respuesta a si se trata de un juego justo? Si no es así, expliquen las causas de esa diferencia. ______

3. En grupo, compartan sus conclusiones y valídenlas con apoyo de su profesor.

Explora y construye

Eventos equiprobables

1 En equipos de tres integrantes, analicen el siguiente juego de azar y respondan.

En una urna hay tres canicas verdes, dos moradas y tres amarillas, todas del mismo tamaño y peso. Tres amigos juegan a extraer al azar una de ellas, anotar su color y regresarla a la urna. Si la canica es verde, Tere gana un punto; si es morada, Cristóbal gana el punto, y si es amarilla, lo gana Karina. El que primero obtenga 15 puntos es el ganador.

a) ¿Los tres amigos tienen la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué? ______

b) Si repitieran el juego varias veces, ¿quién ganaría en más ocasiones? Justifiquen su respuesta. ______

c) ¿Y quién perdería más veces? ¿Por qué? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que cada amigo gane un punto en cada extracción?
- Tere: ______
- Cristóbal: ______
- Karina: ______

e) ¿Consideran que se trata de un juego justo? ¿Por qué? ______

2 Reproduzcan el juego anterior: utilicen una gorra o una bolsa como urna y papeles del mismo tamaño marcados con las letras V, M y A para representar las canicas y sus respectivos colores. Hagan 20 extracciones, registren sus resultados en su cuaderno y contesten lo que se pide.

a) ¿Cuál fue la letra ganadora? ______

b) ¿Los resultados del juego coinciden con sus respuestas a los incisos b) y c) de la actividad anterior? De no ser así, expliquen a qué se debe. ______

Dos o más eventos son *equiprobables* si su probabilidad de ocurrencia es igual.

3 En grupo, compartan sus resultados y respondan. Verifiquen sus respuestas con apoyo de su profesor.

a) ¿Qué eventos de entre "Tere gana un punto", "Cristóbal gana un punto" y "Karina gana un punto" son equiprobables? ¿Por qué? ______

b) ¿Cómo se relaciona su respuesta anterior con el hecho de que el juego de azar sea justo? ______

4 En parejas, consideren el siguiente juego de azar, respondan y realicen lo que se pide.

Cuatro amigos lanzan dos dados y suman los puntos de las caras superiores. Cada jugador gana un punto por ronda, de acuerdo con la suma obtenida: Manuela gana si la suma es 2, 3, 10, 11 o 12; Enrique, si la suma es 4 o 7; Ingrid, si es 5 o 6, y Álvaro, si es 8 o 9. Gana quien primero obtenga 20 puntos.

a) Sin hacer operaciones respondan: ¿Es un juego de azar justo? ¿Por qué?

______

______

b) Completen la tabla 5.6.1 y determinen la probabilidad de que cada participante gane un punto en cada ronda.

Toma nota

Localiza el término "eventos equiprobables" en el glosario (págs. 256-258); con tus propias palabras escribe su definición y un ejemplo.

		Cara superior dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Cara superior dado 2	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Tabla 5.6.1.

- Manuela: ______
- Enrique: ______
- Ingrid: ______
- Álvaro: ______

c) Respondan de nuevo las preguntas: ¿Es un juego de azar justo? ¿Por qué?

______

______

d) ¿Su respuesta del inciso a) es igual a la del inciso c)? De no ser así expliquen por qué. ______

______

e) Analicen las tablas de la siguiente página, las cuales muestran variantes del juego con distinto número de participantes. A cada uno se le asigna un punto según la suma obtenida.
Determinen cuáles representan un juego de azar justo y cuáles no. Justifiquen sus respuestas y, si el juego no es justo, indiquen qué jugador tiene mayor ventaja sobre los demás.

Jugador	Suma obtenida
Manuela	2 o 6
Enrique	3 o 5
Ingrid	4 o 10
Álvaro	7
Cristina	8 o 12
Joaquín	9 u 11

Tabla 5.6.2.

Jugador	Suma obtenida
Manuela	2, 3 o 4
Enrique	5 o 6
Ingrid	7
Álvaro	8 o 9
Cristina	10, 11 o 12

Tabla 5.6.3.

Busca en...

www.edutics.mx/4uY donde podrás realizar juegos con dados de formas diferentes y aprenderás a distinguir cuándo un juego es justo y cuándo no. (Consulta: 20 de enero de 2019).

Jugador	Suma obtenida
Manuela	2, 3, 4 o 7
Enrique	5, 6 o 10
Ingrid	8, 9, 11 o 12

Tabla 5.6.4.

Jugador	Suma obtenida
Manuela	1, 2, 3, 4 o 5
Enrique	9, 10, 11 o 12
Manuela y Enrique	6, 7 u 8

Tabla 5.6.5.

5 Comenten con otra pareja sus criterios para determinar si los juegos son justos. Con apoyo de su profesor, verifiquen sus respuestas y propongan una variante, distinta de las anteriores, que sea justa y en la que participen tres jugadores. Anótenla a continuación.

Jugador	Suma obtenida
Manuela	
Enrique	
Ingrid	

Tabla 5.6.6.

¿Es justo?

1 En parejas, analicen lo siguiente y respondan.

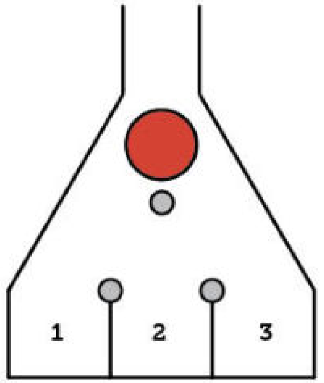


Fig. 5.6.2.

Miguel y Reyna juegan con un tablero Quincunx, también conocido como caja de Galton, una estructura construida con tablas de madera y clavos, como la de la figura 5.6.2.

El juego consiste en soltar una pelota desde la parte superior, que golpea con el primer clavo y puede ir, con la misma probabilidad, hacia la izquierda o hacia la derecha. Después la pelota golpea un segundo clavo y de nuevo puede ir hacia la derecha o la izquierda, con la misma probabilidad, para caer en una de las casillas numeradas del 1 al 3.

Miguel elige las casillas 1 y 3. Si la pelota cae en alguna de esas casillas, gana un punto y, en caso contrario, el punto es para Reyna. El primero en obtener 10 puntos es el ganador.

a) ¿Se trata de un juego justo? ¿Por qué? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que cada jugador gane un punto por ronda? ______

c) Si consideran que el juego no es justo, modifiquen las reglas para que lo sea. Argumenten su respuesta. ______

2 En grupo, compartan sus respuestas y argumentos con los de otra pareja y corríjanlos si es necesario. Verifiquen que sean correctos con apoyo de su profesor.

3 En equipos, analicen la siguiente variante de la actividad anterior y contesten.

Leticia, Miguel y Santiago juegan con un tablero Quincunx igual al anterior. Si la pelota cae en la casilla 1, Leticia gana un punto; si cae en la casilla 2, es para Miguel, y si cae en la 3, el punto es para Santiago. Gana quien primero obtenga 10 puntos.

a) ¿Por qué las reglas del juego no son justas? ______

b) ¿Cómo se pueden modificar para que sean justas para los tres? Justifiquen su respuesta. ______

4 En grupo, comenten con otra pareja sus criterios para que el juego sea justo. Si consideran que la propuesta del otro equipo no es correcta, expliquen en qué consisten sus errores y corríjanla. Validen sus resultados con apoyo de su profesor.

5 En parejas, determinen cuáles de los siguientes juegos son justos. Justifiquen sus respuestas y, de ser necesario, propongan reglas para que lo sean.

a) Los participantes A y B juegan a lanzar un dado. Si la cara superior muestra un número par, gana A y si es impar, gana B. ______

b) Los participantes C y D juegan a lanzar un dado. Si la cara superior muestra un número primo, gana C y si es compuesto, gana D. ______

c) Tres jugadores, J_1, J_2 y J_3, lanzan cada uno una moneda. Si al caer, las tres caras superiores son iguales, gana J_1; si dos caras son águila y una sol, gana J_2, y si dos son sol y una águila, gana J_3. ______

6 En grupo, discutan sus respuestas y verifiquen que sean correctas con ayuda de su profesor.

Reflexiona

1. Analiza y contesta lo siguiente. Después contrasta tu respuesta con la de un compañero y verifiquen que sea correcta.

   a) Si cuatro personas juegan con un tablero de Quincunx, como el de la figura 5.6.3, ¿qué reglas propondrías para que sea un juego justo? Justifica tu respuesta. ______

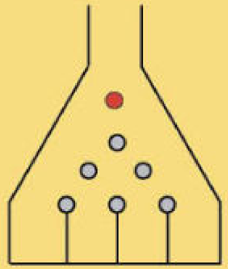


Fig. 5.6.3.

Regresa y revisa

1 Analiza y contesta. Justifica tus respuestas.

a) ¿Qué modificaciones harías a las reglas del juego de la situación inicial para que sea justo? ______

b) ¿Cómo modificarías las reglas de la actividad 1 de la página 243 para que sea un juego justo? ______

c) Propón reglas para el juego de lanzar dos dados y sumar sus caras superiores, de modo que sea un juego justo para cinco participantes. Responde en tu cuaderno.

La torre de Hanói

La torre de Hanói es un rompecabezas muy popular creado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas (1842-1891). El juego consiste en una base con tres varillas verticales, en una de las cuales se inserta cierto número de discos (por lo común ocho) (figura 5.A.1). El objetivo del juego consiste en trasladar la torre de discos a otra varilla, considerando las siguientes reglas:

Fig. 5.A.1.

- En cada paso sólo se permite mover un disco.
- Nunca debe ponerse un disco encima de otro más pequeño.
- Sólo se puede mover el disco superior de cada torre.

La caja del juego original indicaba que éste se había inspirado en una antigua leyenda hindú que refiere que, en el Gran Templo de Benarés, había una cúpula que señalaba el centro del mundo y, en ésta, había una bandeja de bronce con tres varillas de diamante. Cuando el dios Brahma creó el mundo, en una de estas varillas ensartó 64 discos de oro puro de distintos tamaños, ordenándolos de mayor a menor tamaño de abajo hacia arriba: ésta es la Torre de Brahma. Día y noche, sin descanso, los monjes del templo trasladaban la torre a otra varilla siguiendo las reglas inmutables de Brahma (las reglas del juego indicadas). Cuando concluyeran, el templo se convertiría en polvo y el mundo llegaría a su fin.

Lucas no sólo inventó el rompecabezas, también creó esta historia para dotarlo del encanto e interés que han perdurado desde entonces.

1 Consigue ocho hojas de diferentes colores, con ellas construye ocho discos a partir de ocho cilindros del 1 cm de grosor.

2 Para construir los cilindros, traza sobre cada hoja un desarrollo plano de las dimensiones adecuadas, como el que muestra la figura 5.A.2. Considera que el radio de la base de cada cilindro deberás modificarlo de manera que la torre parezca que ha sido cortada de un cono recto de 10 cm de altura y de un diámetro de 10 cm en la base (figura 5.A.3), o, si lo prefieres, cambia las medidas del cono.

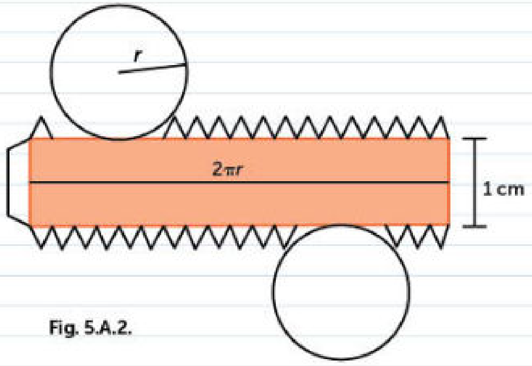


Fig. 5.A.2.

Aplica las matemáticas

Con las condiciones propuestas, responde:

a) ¿Cuál es el radio del cilindro más pequeño? Explica el método que usaste para determinarlo.

3 Numera los cilindros de menor a mayor, de modo que al número 1 corresponda el radio que calculaste en la pregunta anterior. Completa el cuadro 5.A.1 con las medidas del radio de cada cilindro y responde.

a) ¿Cuál es la diferencia entre el radio de cada par de discos adyacentes?, ¿es siempre la misma?

b) ¿Puedes explicar por qué ocurre esto?

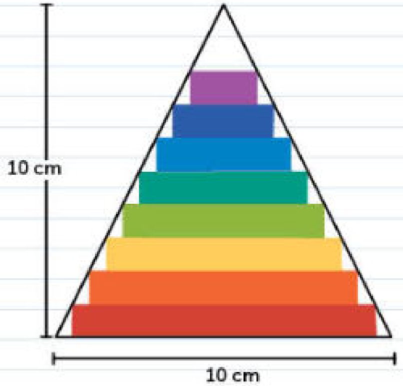


Fig. 5.A.3.

Cilindro	Radio (cm)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Tabla 5.A.1.

4 Recuerda el procedimiento para determinar el radio de las circunferencias que se obtienen al hacer cortes paralelos a la base de un cono recto.

Una vez que tengas los discos de tu Torre de Hanói, construye la base: traza en una hoja tres círculos del mismo tamaño que la base del cilindro más grande que construiste, como muestra la figura 5.A.4.

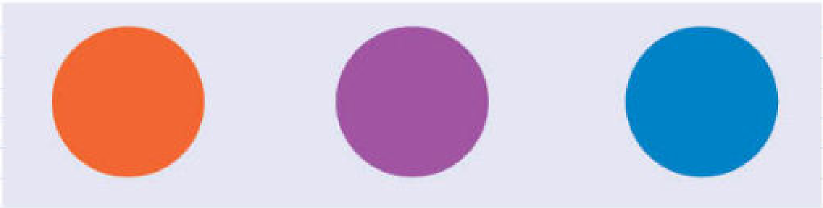


Fig. 5.A.4.

Y ya está. ¡A jugar! Muchas preguntas interesantes, pero nada obvias, se pueden plantear en relación con este juego. Por ejemplo, ¿qué cantidad mínima de pasos se necesitan para resolver una torre de Hanói de 8 discos?, ¿y una de 64 discos?

¿Difícil? Si te parece muy complicado, comienza con tres discos y ve aumentando la dificultad.

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos

En esta sección aplicarás las habilidades que desarrollaste en este bloque para calcular las variables implicadas en la fórmula del volumen de un cilindro y de un cono mediante un programa matemático interactivo de dibujo. No todos los programas matemáticos de dibujo son iguales, busca las funciones que sean similares a las que aquí se muestran.

1 Abre el programa, haz clic en el botón de *Vista gráfica*, desactiva los ejes y activa la cuadrícula. De esta forma visualizarás en la pantalla la *Vista gráfica* en blanco y la *Vista algebraica* cuadriculada (figura 5.H.1.).

Busca en...

www.edutics.mx/4hC
un *software* gratuito de geometría, álgebra y cálculo. (Consulta 20 de enero de 2019).

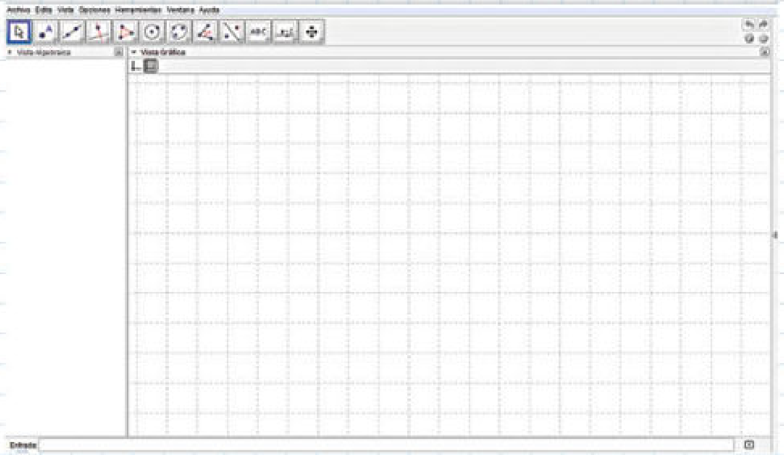


Fig. 5.H.1.

- Da clic en el triángulo inferior izquierdo del ícono y elige la opción *Elipse*. Para dibujar la elipse coloca el cursor en un punto de intersección de dos líneas punteadas que forman la cuadrícula de la *Vista gráfica*, aparecerá un punto *A*. Posiciona el cursor en otro punto hacia la derecha sobre la misma línea; aparecerá un punto *B* y una recta que une ambos puntos, como ilustra la figura 5.H.2.

Fig. 5.H.2.

- Mueve el cursor hacia la izquierda y ligeramente hacia arriba. Observa que se forma una elipse; abre la elipse lo necesario para que los puntos que dibujaste queden en ella y da clic; verás un punto *C*. Ésta es la base de tu cilindro (figura 5.H.3).

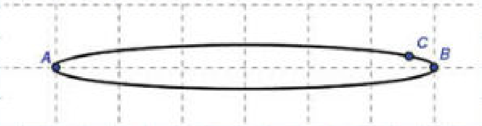


Fig. 5.H.3.

- Haz clic en el botón secundario del ratón sobre el punto *C* y desactiva la opción *Muestra* objeto para que el punto *C* no sea visible.

- Da clic en el ícono y selecciona la opción *Punto medio* o *Centro*, haz clic en los puntos *A* y *B*; aparecerá un punto *D* en el centro. En el ícono elige la opción *Segmento entre Dos Puntos* y traza el segmento correspondiente entre los puntos *D* y *B*, el cual será el radio de tu cilindro (figura 5.H.4).

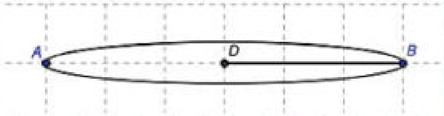


Fig. 5.H.4.

- Dibuja la cara superior del cilindro en forma análoga a como dibujaste la base, pero en un punto superior a la base y, en este caso, no traces el radio. Da clic en el ícono y complementa tu cilindro con la herramienta *Segmento entre Dos Puntos*, como indica la figura 5.H.5.

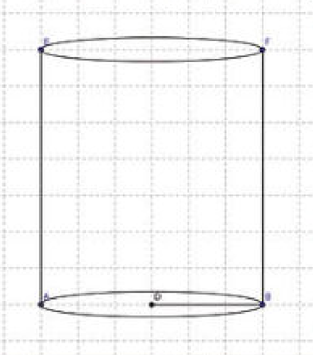


Fig. 5.H.5.

- En la *Vista algebraica* de la pantalla verás los valores de los segmentos del cilindro que corresponden con el radio (a) y la altura (b y e) (figura 5.H.6). Si tienes dudas sobre a qué valor corresponde cada una de las literales, en el ícono selecciona la opción *Elige y Mueve* y haz clic sobre una de las rectas del cilindro. En la *Vista algebraica* se resaltará la literal con el valor al que corresponde la recta que seleccionaste.

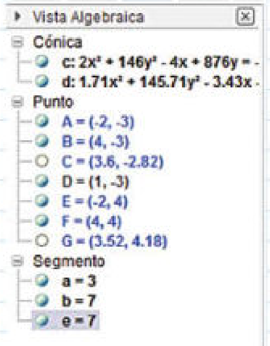


Fig. 5.H.6.

- Con los datos del tamaño de los segmentos calcularás el volumen del cilindro. En el menú *Vista* selecciona la opción *Hoja de Cálculo* y en las primeras cuatro celdas de la columna A de la hoja de cálculo escribe: *Volumen*, *Área de la base*, *Radio* y *Altura*, como se muestra en la figura 5.H.7.

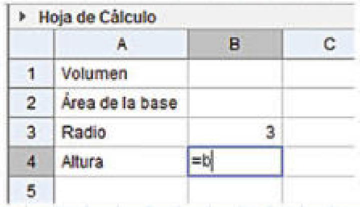


Fig. 5.H.7.

- Inserta los valores del radio y la altura en las celdas de la columna B que les corresponden. Escribe el signo "=" y la literal que corresponde con dicho valor; en este caso, "=a" para el radio e "=b" para la altura (figura 5.H.7).

- Inserta la fórmula para calcular el volumen; en la celda B1 escribe: *=(3.1416)*(a*a)*(b)* y oprime *Entrar*: aparecerá el valor del volumen del cilindro. Para calcular el área de la base, en la celda B2 escribe la fórmula: *=(3.1416)*(a*a)* y oprime *Entrar* (figura 5.H.8.).

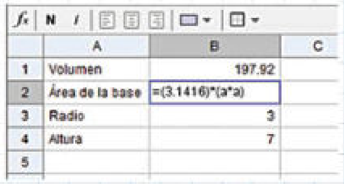


Fig. 5.H.8.

▶ Modifica el radio del cilindro en el dibujo que trazaste; en el ícono selecciona la opción *Elige y Mueve*, haz clic en el punto donde se unen el radio y el extremo de la base y mueve horizontalmente. Cambia de la misma manera la base superior del cilindro para que no se deforme. Observa cómo se modifica el área de la base y el volumen.

a) ¿Cómo es la relación entre el radio del cilindro y el área de su base?

b) ¿Cómo es la relación entre el radio y el volumen el cilindro.

c) ¿De qué manera corroborarías que las fórmulas que escribiste son correctas?

2 Abre una nueva ventana desde el menú *Archivo*, sigue el mismo procedimiento pero ahora construye un cono.

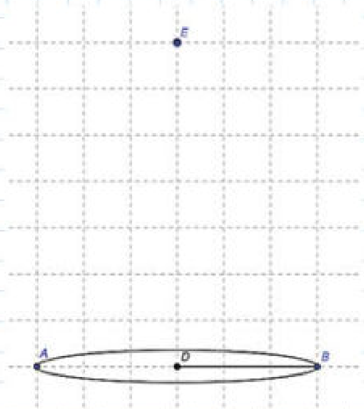


Fig. 5.H.9.

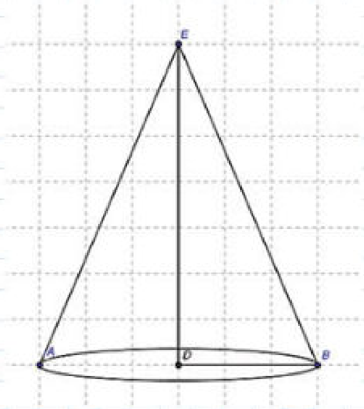


Fig. 5.H.10.

▶ Dibuja la base del cono como lo hiciste para el cilindro, da clic en el ícono , elige la opción *Nuevo Punto* y coloca el punto en un sitio perpendicular al centro de la base, el cual representará la cúspide del cono (figura 5.H.9). En el ícono elige la opción *Segmento entre Dos Puntos* y para completar el cono traza los segmentos entre el punto de la cúspide y los puntos de los extremos de la base. Con la misma herramienta, traza un segmento entre la cúspide y el centro de la base, el cual representará la altura del cono (figura 5.H.10).

a) ¿Cuáles son los valores del radio y la altura del cono?

▶ Con los valores que obtuviste abre la hoja de cálculo, desde el menú *Vista*, y completa los datos del volumen y el área de la base, de manera análoga como lo hiciste con el cilindro.

a) ¿Qué fórmulas insertarás para calcular el volumen y el área de la base?

▶ Puedes modificar el radio y la altura del cono como lo hiciste antes. Hazlo y observa cómo varían el área y el volumen del cono.

Compara tus resultados con los de un compañero, discutan el procedimiento que emplearon para insertar las fórmulas y, con ayuda de su profesor, verifiquen que sus resultados sean correctos.

1 Lee cada uno de los siguientes enunciados.

2 Señala si es falso (F) o verdadero (V).

3 Explica cómo verificarías tu respuesta.

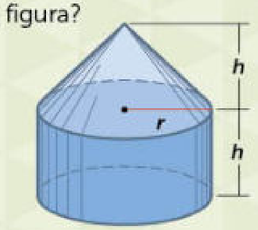
Enunciado	F	V	Propuesta de verificación
a) En una granja hay gallinas y cerdos. Si entre todos los animales se cuentan 12 cabezas y 38 patas, entonces hay 7 gallinas.			
b) Al cortar un cilindro hueco con un plano perpendicular a la base se obtiene una circunferencia.			
c) Para calcular el volumen de un cono de diámetro, *d*, y altura, *h*, se utiliza la fórmula $V = \frac{d^2\pi h}{3}$.			
d) Un cono de 350 cm^3 de volumen y 12 cm^2 de base tiene una altura de 87.5 cm.			
e) La gráfica que representa la distancia que recorre un automóvil respecto al tiempo transcurrido, cuando el automóvil acelera de manera constante, es una curva.			
f) El juego de azar "piedra, papel o tijeras" es injusto porque hay tres posibles resultados y sólo dos participantes.			

4 En la página 255 revisa qué enunciados son falsos y cuáles verdaderos. Consulta en tu libro los temas de las respuestas erróneas; si es necesario, replantea tus propuestas de verificación y aplícalas.

1 Una cisterna tiene 86 L de agua y pierde 0.75 L por minuto. Otra cisterna tiene 80 L y pierde 0.5 L por minuto. Si ambas se empezaron a vaciar al mismo tiempo, ¿en qué momento tendrán la misma cantidad de agua?

a) A los 2.4 min.
b) A los 24 min.
c) A los 12 min.
d) A los 1.2 min.

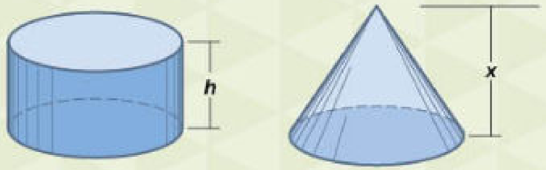
2 ¿Qué expresión permite calcular el volumen de esta figura?



a) $V = \pi r^2 h + 3\pi r^2 h$
b) $V = 2\pi r^2 h$
c) $P = \frac{4}{3}\pi r^2 h$
d) $P = \pi r^2 h + \pi\left(\frac{r}{3}\right)^2 h$

3 Un cono y un cilindro tienen bases de la misma área. La altura del cono es de x unidades y la del cilindro, de h unidades. ¿Cuál debe ser la altura del cono para que su volumen sea igual a la mitad del volumen del cilindro?

a) $x = 2h$
b) $x = \frac{2}{3}h$
c) $x = \frac{h}{2}$
d) $x = \frac{3}{2}h$



4 Se tienen 6 L de solución salina con una concentración de 8%. ¿Qué cantidad de sal se debe agregar a 5 L de agua pura para obtener la misma concentración?

a) 40 g
b) 400 g
c) 480 g
d) 80 g

5 Dos amigos realizan un juego de azar que consiste en sacar una pelota de una caja que contiene seis pelotas azules, tres verdes, dos amarillas y una negra. Si la pelota es azul, gana Juan; si es verde, amarilla o negra, gana Pepe. ¿Cuál afirmación es correcta?

a) El juego es injusto porque a Pepe le favorecen más colores.
b) El juego es injusto porque a Juan le favorecen más resultados.
c) El juego es justo.
d) No se puede determinar si el juego es o no justo.

1 Resuelve los problemas que se proponen.

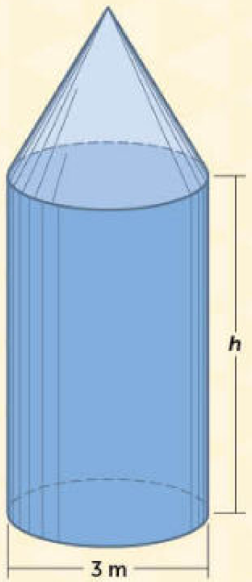
a) La tarifa por la renta de un automóvil es de $300.00 diarios más $30.00 por cada 50 km recorridos.

- ¿Cuánto pagó aproximadamente quien rentó el automóvil durante dos días y en promedio recorrió 300 km al día? ____________
- ¿Cuánto pagaría por cinco días si el promedio de distancia recorrida permanece constante? ____________

b) El triple de la cantidad de dinero que ha ahorrado Miguel más el doble de lo que ahorró Lucy es igual a $4 240.00, y el doble de lo que tiene Miguel menos $540 es igual al ahorro de Lucy.

- ¿Cuánto dinero ha ahorrado cada uno? ____________

2 La figura muestra las dimensiones de un depósito de granos formado por un cilindro y un cono. La base es circular y la altura del cono mide la mitad que la del cilindro.



a) Si el volumen total del depósito es de 42 m^3, ¿cuál es su altura?

b) ¿Qué opciones permiten construir un depósito del doble de capacidad?

- Duplicar la altura de la cono.
- Aumentar al doble el diámetro del cilindro.
- Aumentar al doble la altura del cilindro.
- Aumentar al doble la altura del cilindro y del cono.
- Cuadruplicar la altura del cilindro y disminuir a la mitad la altura del cono.

3 Dentro de una urna hay 10 pelotas: cinco amarillas, tres rojas y dos azules. Si se saca al azar una pelota y se regresa antes de sacar otra, calcula la probabilidad de los siguientes eventos.

a) Que salgan consecutivamente dos pelotas amarillas. ____________
b) Que en forma consecutiva tres pelotas sean de distinto color. ____________
c) Que salga una pelota roja e inmediatamente una azul. ____________

Respuestas de la autoevaluación de la página 253. Enunciados falsos: a), b), c), f); enunciados verdaderos: d), e).

Concepto	Mi explicación	Ejemplo
Coseno		
Desviación media		
Eventos complementarios		
Eventos equiprobables		
Eventos independientes		

Concepto	Mi explicación	Ejemplo
Eventos mutuamente excluyentes		
Figuras homotéticas		
Muestra representativa		
Razón de cambio		
Rotación		

Mi glosario matemático

Concepto	Mi explicación	Ejemplo
Seno		
Sólidos de revolución		
Tangente		
Teorema de Pitágoras		
Teorema de Tales		
Traslación		

Bibliografía

Bibliografía recomendada para el alumno

Adams, Simon, *Descifradores de códigos. Desde los jeroglíficos hasta los hackers*, México, SEP-Planeta, 2003 (Colección Libros del Rincón).

Blatner, David, *El encanto de Pi*, México, SEP-Aguilar, 2003 (Colección Libros del Rincón).

Blum, Wolfgang, *Matemáticas*, México, SEP-Altea, 2005.

Bosh, Carlos, *El cero*, México, SEP-Nuevo México, 2005 (Colección Libros del Rincón).

Campos Pérez, Mario, *Andrés y el dragón matemático*, México, Laertes, 2005.

Codina Pascual, Roser, Carmen Burgués Flamarich y Manuel Montanuy Fillat, *Apuntes de matemáticas*, México, SEP-Parramón Ediciones, 2007 (Colección Libros del Rincón).

Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números: Un libro para todos aquellos que temen a las matemáticas*, Madrid, Siruela, 2008.

Garber, Martin, *Acertijos matemáticos*, México, Selector, 2002.

Garber, Martin, *Las últimas recreaciones*, Barcelona, Gedisa, 2002.

Herrera, Rosa María, *¡Cuánta geometría hay en tu vida!*, México, SEP-SM, 2003 (Colección Libros del Rincón).

Juster, Norton, *La recta y el punto*, México, SEP-FCE, 2005.

Parisi, Anna, *Números geométricos y estrellas fugaces*, México, SEP-Oniro, 2005 (Colección Libros del Rincón).

De la Peña, José Antonio, *Geometría y el mundo*, México, SEP-Santillana, 2002 (Colección Libros del Rincón).

Perelman, Yacob, *Álgebra recreativa*, Barcelona, Martínez Roca, 2000.

Perelman, Yacob, *Matemática recreativa*, Barcelona, Martínez Roca, 2000.

Ruiz, Concepción y Sergio de Regules, *El piropo Matemático. De los números a las estrellas*, Barcelona, Lectorum, 2000.

Tonda, Juan y Francisco Noreña, *Los señores del cero: El conocimiento matemático en Mesoamérica*, México, SEP-Pangea, 2003.

Bibliografía recomendada para el profesor

Berlanga, Ricardo, *et al.*, *Las matemáticas: Perejil de todas las salsas*, México, Fondo de Cultura Económica, 1999.

Boule, François, *Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*, México, Correo del Maestro y Ediciones La Vasija, 2005.

Carroll, Lewis, *A través del espejo y lo que Alicia encontró allí*, España, Sexto Piso, 2011.

Chamorro, María del Carmen, *Didáctica de las Matemáticas*, México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 2005.

Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Josep Gascón, *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, SEP, 2004 (Colección Biblioteca para la Actualización del Maestro).

Clark, David, *Evaluación constructiva de las Matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.

Garner, Howard, *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar en las escuelas*, México, SEP-Paidós, 1997 (Colección Biblioteca para la Actualización del Maestro).

Marván, Luz María, *Representación numérica*, México, SEP-Santillana, 2002.

Ortiz, Francisca, *Matemáticas: Estrategias de enseñanza y aprendizaje*, México, Pax, 2001.

Polya, George, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, 2005.

Rivaud, Juan José, comp., *Matemáticas para todos*, México, Fondo Mexicano para la Educación y el Desarrollo, 2003.

Santos, Luz Manuel, *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, México, CINVESTAV-Iberoámerica, 1997.

Ursini, Sonia, *et al.*, *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*, México, Trillas, 2005.

Enlaces a sitios web recomendados

Para el alumno

Guía interactiva para secundaria, disponible en http://tveracruzanas.blogspot.com/2017/03/guia-interactiva-para-secundaria-gis.html (Consulta: 20 de enero de 2019).
En este sitio *web* encontrarás una guía interactiva, de la SEP, en donde podrás consolidar tus conocimientos de matemáticas.

Matemáticas sin números, disponible en http://red.ilce.edu.mx/20aniversario/componentes/redescolar/act_permanentes/mate/mate.htm (Consulta: 20 de enero de 2019).
Dirección *web* de la Red Escolar del ILCE para aprender matemáticas.

Pensamiento lógico matemático México, disponible en http://red.ilce.edu.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=17&Itemid=117 (Consulta: 20 de enero de 2019).
En este sitio *web* se trabaja sobre la competencia lógico-matemática. En él, encontrarás material digital con recursos atractivos.

Para el profesor

Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/ (Consulta: 20 de enero de 2019).
En este sitio *web* se encuentra material multimedia interactivo de matemáticas para secundaria.

Telesecundaria, disponible en https://telesecundaria.sep.gob.mx/Content/Docente/docente.php (Consulta: 20 de enero de 2019).
Dirección *web* que ofrece una amplia gama de materiales educativos digitales.

Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, disponible en http://www.revistasuma.es (Consulta: 20 de enero de 2019).
En este sitio podrá descargar algunos números de la revista suma. Esta revista trata sobre temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Bibliografía

Bibliografía consultada

Alarcón Bortolussi, Jesús, *et al.*, *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*, México, SEP, 1994.

Alarcón, Jesús *et al.*, *Libro para el maestro. Matemáticas*. Secundaria, México, SEP, 1994.

Blatner, David, *The Joy of Pi*, Nueva York, Walker and Company, 1997.

Carpinteyro, Eduardo y Rubén Sánchez, *Álgebra*, México, Patria, 2002.

Casanueva, Esther y Marta Kaufer, *Nutriología Medica*, México, Editorial Mecia Panamericana, 2001.

Courant, Richard y Harold Robbins, *¿Qué es la matemática?*, México, Fondo de Cultura Económica, 2005.

Davlin, Keith, *Mathematics The Science of Patterns*, Estados Unidos de América, Owl Books Editions, 2003.

Eves, Howard, *An Introducción to the History of Matemátics*, Filadelfia, Saunders College, 1990.

Klien, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York, Oxford University Press, 1972.

Kline, Morris, *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, México, Fondo de Cultura Económica, 1992.

Kordemsky, *Boris, The Moscow Puzzle*, Dover Publications, Estados Unidos de América, 1992.

Marván, Luz María, *Explorando en matemáticas 3*, México, Nuevo México, 2000.

Pappas, Theoni, *Math Stuff*, Estados Unidos de América, Tetra-Wide World Publishing, 2002.

Paulos, John Allen, *El hombre anumérico: El analfabetismo matemático y sus consecuencias*, Barcelona, Tusquets, 1990.

Rivaud, Juan José, comp., *Matemáticas para todos*, México, Fondo Mexicano para la Educación y el Desarrollo, 2003.

Créditos iconográficos

© Latinstock México: pp. 20-21, 160-161, 210-211; © Thinkstock: pp. 87 (2.3.9.); 202 (4.A.2.); © Shutterstock: pp. 76 (2.2.1); 83 (2.3.1.), 86 (2.3.5., 2.3.6.), 112-113, 186 (4.5.1.), 190 (4.5.7.), 202 (4.A.1.), 224 (5.3.1.), 248 (5.A.1.); © Other Images: pp. 68-69; Gerardo González López: pp. 22 (1.1.2.), 44 (1.5.1.), 203 (4.A.3., 4.A.4.).

pp. 20-21: *Luna sobre la geoesfera en Disney World EPCOT Center* (1982), Orlando, Florida, fotografía: Kevin Fleming/Corbis; **pp. 68-69:** *Mandala Budista Tibetano*, © AGE RM; **pp. 160-161**: *Escaleras al Umbracle y el Museo de Ciencias*, (2000), Museo Príncipe Felipe de las Ciencias, Ciudad de las Artes y las Ciencias, fotografía: Massimo Borchi/Corbis; **pp. 210-211:** *Tablero de Serpientes y Escaleras*, Fine Art Premium/Corbis.

Ilustraciones y gráficos:
Fernando David Ortiz Prado: pp. 22 (1.1.1.), 50 (1.6.1.), 95 (2.5.1.), 97 (2.5.4.-2.5.5.), 98 (2.5.6.), 120 (3.2.1.), 121 (3.2.2.), 124 (3.2.9.), 126 (3.3.2.), 128 (3.3.6.), 131 (3.4.1.), 191 (4.5.8., 4.5.9.-4.5.10.), 218 (5.2.1, 5.2.2.), 220 (5.2.3., 5.2.4.), 223 (5.2.10.); Carmen Gutiérrez Cornejo: pp. 104 (2.A.1., 2.A.2), 105 (2.A.3., 2.A.4., 2.A.5.); Jesús Enrique Gil de María y Campos: pp. 111 (sup.), 122 (3.2.4.), 123 (3.2.6.), 145 (3.6.10.), 146 (3.6.11.), 148 (3.7.1.), 174 (4.3.1.), 236 (5.5.1.), 238 (5.5.2.), 239 (5.5.3.); Victor Duarte Alaniz: pp. 66, 67, 110, 111, 149 (3.7.2.), 150 (3.7.3.), 158, 159, 208, 209, 225 (5.3.2., 5.3.3., 5.3.4.), 226 (5.3.5., 5.3.6., 5.3.7.), 227 (5.3.8., 5.3.9.), 229 (5.4.2., 5.4.3.), 230 (5.4.4.), 230 (5.4.5.), 232 (5.4.6.), 233 (5.4.7.), 234 (5.4.8.), 235, 254, 255; Rocío Álvarez Mince: pp. 27 (1.2.1), 29, 30, 31, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 60, 61, 72, 73, 76 (2.2.2.), 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 115, 117, 118, 125, 127, 129, 130, 132, 134, 135, 136, 138, 139, 140, 142, 143, 144, 152, 153, 158, 159, 162, 163, 165, 166, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 187, 189, 190, 192, 193, 195, 196, 208, 221, 222, 235, 240, 241, 246, 249.

Esta obra se terminó de imprimir en
diciembre de 2013 en los talleres de
Impresora y Editora Xalco, S. A. de C. V.,
J. M. Martínez No. 301 Col. Jacalones,
Chalco, Edo. de México.

www.edicionescastillo.com
infocastillo@macmillaneducation.com
Lada sin costo: 01 800 536 1777

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

ISBN 978-607-463-964-3